STUDIO DELLE CARATTERISTICHE ORBITALI E DEI PARAMETRI DEL MOTO DELLA COMETA HALLEY

A mia figlia
Giulia

Rovereto, 07 ottobre 2014
e
12 ottobre 2018

FUSARO Dott. Ing. Saverio

COMETA HALLEY

Della Cometa Halley si conoscono i seguenti punti dell'orbita:

Perielio (09 febbraio 1986) – Distanza dal sole = **0,5871 UA**

Afelio (09 febbraio 2024) – Distanza dal sole = **35,2961 UA**

Studio dell'orbita.

Calcoli

Sappiamo che l'orbita è ellittica, poiché la cometa ritorna periodicamente, perché soggetta **all'azione di una forza centrale dovuta all'attrazione gravitazionale del sole**.

" Si dice che **la forza** che agisce sopra un punto materiale **è centrale**, allorquando il punto fisso cui è diretta la forza è attraversato, per tutto il tempo del moto del punto materiale, dalla forza stessa, la quale passa quindi attraverso un punto fisso **O** denominato centro della forza".

Ora essendo:

1 UA = 149.597.870 Km (Distanza media Terra Sole) = **149.597.870.000 m**

ed indicando con,

$\mathbf{r_1}$ = Distanza della cometa al **perielio** = 0,5871 UA = **87.828.909.477 m = $8{,}7829 \cdot 10^{10}$ m**

$\mathbf{r_2}$ = Distanza della cometa all'**afelio** = 35,2961 UA = **5.280.221.379.310 m = $5{,}2802 \cdot 10^{12}$ m**

si trovano i parametri dell'ellisse:

il semiasse maggiore è dato da:

$$a = \frac{1}{2} \cdot (r_1 + r_2) = \frac{5{,}2802 \cdot 10^{12} + 8{,}7829 \cdot 10^{10}}{2} = 2{,}6840 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

l'eccentricità dell'ellisse sappiamo essere data dà:

$$\varepsilon = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = \frac{5{,}2802 \cdot 10^{12} - 8{,}7829 \cdot 10^{10}}{5{,}2802 \cdot 10^{12} + 8{,}7829 \cdot 10^{10}} = 0{,}96727700$$

il semiasse minore è

$$b = a \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2} = 2{,}6840 \cdot 10^{12} \cdot \sqrt{1 - 0{,}967277^{\,2}} = 6{,}8099 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

il parametro p dell'ellisse vale

$$p = \frac{b^2}{a} = a \cdot (1 - \varepsilon^2) = \frac{(6{,}8099 \cdot 10^{11})^2}{2{,}6840 \cdot 10^{12}} = 1{,}7278 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

e **l'area dell'ellisse** è

$$S = \pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot a^2 \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \pi \cdot 2{,}6840 \cdot 10^{12} \cdot 6{,}8099 \cdot 10^{11} = 5{,}7421 \cdot 10^{24} \text{ m}^2$$

Il **periodo orbitale** della cometa sappiamo essere:

P = [(09 febbraio 1986) – (09 febbraio 2024)] · 2 = 27.758 giorni = $2{,}3983 \cdot 10^9$ sec = 76,05 anni

La **velocità media areale,** da non confondere con **la costante areale o areolare C** = $2 \cdot \dot{S}$, vale:

$$\dot{S} = \frac{S}{P} = \frac{5{,}7421 \cdot 10^{24}}{2{,}3983 \cdot 10^{9}} = 2{,}3942 \cdot 10^{15} \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}$$

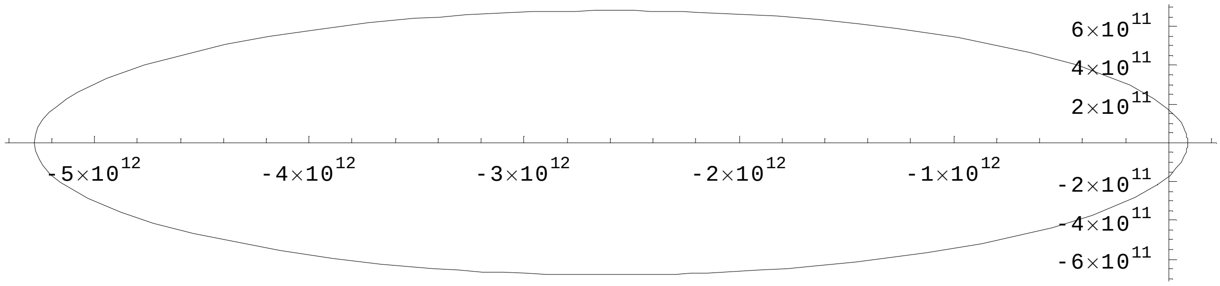
Allora, in **coordinate polari**, l'equazione della traiettoria ellittica è data dà:

$$\rho = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{1 + \varepsilon \cdot \cos\theta}}$$

ossia:

$$\rho = \frac{\mathbf{1{,}7278 \cdot 10^{11}}}{\mathbf{1 + 0{,}967277 \cdot \cos\theta}} \qquad \mathbf{m}$$

e nel piano polare presenta il seguente andamento:



Mentre la corrispondente traiettoria ellittica rappresentata da un'equazione in **coordinate cartesiane, con il centro O degli assi coordinati ortogonali x, y, in un FUOCO,** e l'asse **x** diretto lungo la linea degli apsidi, è data dà:

$$\mathbf{b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 + 2 \cdot b^2 \cdot \left(\sqrt{a^2 - b^2}\right) \cdot x - b^4 = 0}$$

che diviene:

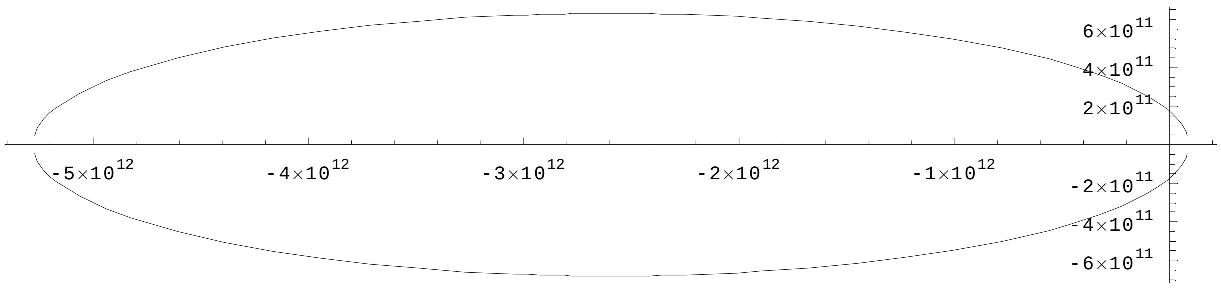
$$\mathbf{4{,}6375 \cdot 10^{23} \cdot x^2 + 7{,}2039 \cdot 10^{24} \cdot y^2 + 2{,}4079 \cdot 10^{36} \cdot x - 2{,}1506 \cdot 10^{47} = 0}$$

e dalla quale, si può ricavare l'equazione numerica della traiettoria:

$$\mathbf{y = \pm 3{,}7258 \cdot 10^{-13} \cdot \sqrt{2{,}1506 \cdot 10^{47} - 2{,}4079 \cdot 10^{36} \cdot x - 4{,}6375 \cdot 10^{23} \cdot x^2}}$$

Il segno **(+)** rappresenta la parte positiva della traiettoria che si svolge nel **I°** e **II°** quadrante del piano cartesiano, mentre il segno **(–)** rappresenta la parte negativa della traiettoria che si svolge nel **III°** e **IV°** quadrante del piano cartesiano.

Nel piano cartesiano presenta il seguente andamento:



Come si vede le due traiettorie espresse con equazioni diverse sono, però, coincidenti.

CALCOLO DELLA VELOCITÀ ORBITALE, DELLA VELOCITÀ ANGOLARE E DELL'ACCELERAZIONE DELLA COMETA, AL PERIELIO ED ALL'AFELIO.

Per determinare **la velocità orbitale al Perielio**, ossia alla minima distanza dal Sole:

$$\mathbf{r_1 = 87.828.909.477\ m = 8{,}7829 \cdot 10^{10}\ m}$$

usiamo le relazioni valide per l'ellisse in coordinate cartesiane, in cui **x sia compreso fra:**

il punto di metà ellisse ≤ x ≤ ed il punto di Perielio

$$-\sqrt{a^2-b^2} \le x \le a-\sqrt{a^2-b^2}$$

$$-2{,}59617 \cdot 10^{12} \le x \le 8{,}7829 \cdot 10^{10}$$

La componente della velocità orbitale **lungo l'asse x,** vale:

$$\dot{x} = -\frac{2\cdot a\cdot b\cdot \dot{S}\cdot\sqrt{b^2-2\cdot\sqrt{a^2-b^2}\cdot x-x^2}}{b^4-b^2\cdot\sqrt{a^2-b^2}\cdot x}$$

e, **al Perielio**, con i seguenti valori:

$$a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}\ m\ ;\ b = 6{,}8099 \cdot 10^{11}\ m\ ;\ \dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15}\ \frac{m^2}{sec}\ ;\ x = r_1 = 8{,}7829 \cdot 10^{10}\ m$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$v_{x\ Perielio} = 0$$

La componente della velocità orbitale **lungo l'asse y,** vale:

$$\dot{y} = \frac{2\cdot\dot{S}\cdot\sqrt{b^2-y^2}}{a\cdot b-\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{b^2-y^2}}$$

e, **al Perielio**, con i seguenti valori:

$$a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}\ m\ ;\ b = 6{,}8099 \cdot 10^{11}\ m\ ;\ \dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15}\ \frac{m^2}{sec}\ ;\ y = 0$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$v_{y\ Perielio} = 54.520{,}1467\ \frac{m}{sec}$$

Il **modulo della velocità orbitale al Perielio** è dato dalla seguente relazione:

$$v_P = \sqrt{4\cdot\dot{S}^2\cdot\left(\frac{a^2\cdot\left(b^2-2\cdot\sqrt{a^2-b^2}\cdot x-x^2\right)}{\left(b^3-b\cdot\sqrt{a^2-b^2}\cdot x\right)^2}+\frac{b^2-y^2}{\left(a\cdot b-\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{b^2-y^2}\right)^2}\right)}$$

con i seguenti valori:

$$a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}\ m\ \ ;\ \ b = 6{,}8099 \cdot 10^{11}\ m\ \ ;\ \ \dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15}\ \frac{m^2}{sec}$$

$$x = r_1 = 8{,}7829 \cdot 10^{10}\ m\ \ ;\ \ y = 0$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$v_{Perielio} = \mathbf{54.519{,}8575}\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{sec}} = \mathbf{54{,}519}\ \frac{\mathbf{Km}}{\mathbf{sec}} = \mathbf{196.271}\ \frac{\mathbf{Km}}{\mathbf{h}}$$

Per determinare **la velocità angolare al Perielio**, ossia alla minima distanza dal Sole, sappiamo che in una traiettoria ellittica in coordinate polari, la velocità angolare $\dot{\theta}$ può essere espressa mediante la relazione seguente:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{2\cdot\pi\cdot a}{P\cdot\sqrt{1-\varepsilon^2}}\cdot\frac{1+\varepsilon\cdot\cos\theta}{r}$$

Ora al **Perielio** con i seguenti valori:

$a = 2{,}6840\cdot 10^{12}$ m ; $P = 2{,}3983\cdot 10^{9}$ sec ; $\varepsilon = 0{,}96727700$; $r = 8{,}7829\cdot 10^{10}$ m ; $\theta = 0°$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che la velocità angolare, vale:

$$\omega_{Perielio} = 6{,}20765\cdot 10^{-7}\ \frac{rad}{sec}$$

Al **Perielio** la velocità angolare ω poteva essere determinata anche attraverso la relazione:

$$\omega_{Perielio} = \frac{v_{yPerielio}}{r_1} = \frac{54.520{,}1467}{8{,}7829\cdot 10^{10}} = 6{,}20753\cdot 10^{-7}\ \frac{rad}{sec}$$

Come si vede i due valori così calcolati, sono pressoché coincidenti.

Per determinare **l'accelerazione orbitale al Perielio**, ossia alla minima distanza dal Sole, usiamo le relazioni valide per l'ellisse in coordinate cartesiane, in cui **x sia compreso fra:**

il punto di metà ellisse $\leq$ x $\leq$ ed il punto di Perielio

$$-\sqrt{a^2-b^2} \leq x \leq a-\sqrt{a^2-b^2}$$

$$-2{,}59617\cdot 10^{12} \leq x \leq 8{,}7829\cdot 10^{10}$$

La componente dell'**accelerazione orbitale lungo l'asse x,** vale:

$$\ddot{x} = -\frac{4\cdot a^4\cdot \dot{S}^2\cdot x}{b^2\cdot\left(b^2-\sqrt{a^2-b^2}\cdot x\right)^3}$$

e, **al Perielio**, con i seguenti valori:

$a = 2{,}6840\cdot 10^{12}$ m ; $b = 6{,}8099\cdot 10^{11}$ m ; $\dot{S} = 2{,}3942\cdot 10^{15}\ \frac{m^2}{sec}$; $x = r_1 = 8{,}7829\cdot 10^{10}$ m

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$a_{x\,Perielio} = -0{,}0172041\ \frac{m}{sec^2}$$

La componente dell'**accelerazione orbitale lungo l'asse y,** vale:

$$\ddot{y} = -\frac{4 \cdot a \cdot b \cdot \dot{S}^2 \cdot y}{\left(a \cdot b - \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{b^2 - y^2}\right)^3}$$

e, **al Perielio**, con i seguenti valori:

$$a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}\ m\ ;\ b = 6{,}8099 \cdot 10^{11}\ m\ ;\ \dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15}\ \frac{m^2}{sec}\ ;\quad y = 0$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$a_{y\ Perielio} = 0$$

Il **modulo dell'accelerazione orbitale al Perielio** è dato dalla seguente relazione:

$$a_p = \sqrt{\frac{16 \cdot a^2 \cdot \dot{S}^4}{b^4} \cdot \left(\frac{a^6 \cdot x^2}{\left(b^2 - \sqrt{a^2 - b^2} \cdot x\right)^6} + \frac{b^6 \cdot y^2}{\left(a \cdot b - \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{b^2 - y^2}\right)^6}\right)}$$

con i seguenti valori:

$$a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}\ m \quad ; \quad b = 6{,}8099 \cdot 10^{11}\ m \quad ; \quad \dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15}\ \frac{m^2}{sec}$$

$$x = r_1 = 8{,}7829 \cdot 10^{10}\ m \quad ; \quad y = 0$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si si trova che vale:

$$a_{Perielio} = 0{,}0172041\ \frac{m}{sec^2}$$

Per determinare **la velocità orbitale all'Afelio**, ossia alla massima distanza dal Sole,

$$r_2 = 5.280.221.379.310\ m = 5{,}2802 \cdot 10^{12}\ m$$

usiamo le relazioni valide per l'ellisse in coordinate cartesiane, in cui **x sia compreso fra:**

il punto di Afelio $\leq$ x $\leq$ ed il punto di metà ellisse

$$-a - \sqrt{a^2 - b^2} \leq x \leq -\sqrt{a^2 - b^2}$$

$$-5{,}2802 \cdot 10^{12} \leq x \leq -2{,}59617 \cdot 10^{12}$$

La componente della **velocità orbitale lungo l'asse x,** vale:

$$\dot{x} = -\frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \dot{S} \cdot \sqrt{b^2 - 2 \cdot \sqrt{a^2 - b^2} \cdot x - x^2}}{b^4 - b^2 \cdot \sqrt{a^2 - b^2} \cdot x}$$

e, **all'Afelio**, con i seguenti valori:

$$a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}\ m\ ;\ b = 6{,}8099 \cdot 10^{11}\ m\ ;\ \dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15}\ \frac{m^2}{sec}\ ;\ x = r_2 = -5{,}2802 \cdot 10^{12}\ m$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$v_{x\ Afelio} = 0$$

La componente della **velocità orbitale lungo l'asse y,** vale:

$$\dot{y} = -\frac{2\cdot\dot{S}\cdot\sqrt{b^2-y^2}}{a\cdot b+\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{b^2-y^2}}$$

e, **all'Afelio**, con i seguenti valori:

$$a = 2{,}6840\cdot 10^{12}\,m\ ;\ b = 6{,}8099\cdot 10^{11}\,m\ ;\ \dot{S} = 2{,}3942\cdot 10^{15}\ \frac{m^2}{sec}\ ;\quad y = 0$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$v_{y\ Afelio} = -906{,}8644\ \frac{m}{sec}$$

Il segno **(–)** indica che la velocità è diretta nel verso opposto alla direzione dell'asse coordinato.

Il **modulo della velocità orbitale all'Afelio** è dato dalla seguente relazione:

$$v_A = \sqrt{4\cdot\dot{S}^2\cdot\left(\frac{a^2\cdot\left(b^2-2\cdot\sqrt{a^2-b^2}\cdot x-x^2\right)}{\left(b^3-b\cdot\sqrt{a^2-b^2}\cdot x\right)^2}+\frac{b^2-y^2}{\left(a\cdot b+\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{b^2-y^2}\right)^2}\right)}$$

con i seguenti valori:

$$a = 2{,}6840\cdot 10^{12}\ m\quad ;\quad b = 6{,}8099\cdot 10^{11}\ m\quad ;\quad \dot{S} = 2{,}3942\cdot 10^{15}\ \frac{m^2}{sec}$$

$$x = r_2 = -5{,}2802\cdot 10^{12}\ m\qquad ;\quad y = 0$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$v_{Afelio} = 906{,}7170\ \frac{m}{sec} = 0{,}906\ \frac{Km}{sec} = 3.264\ \frac{Km}{h}$$

Per determinare **la velocità angolare all'Afelio**, ossia alla massima distanza dal Sole, usiamo la relazione precedentemente vista:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{2\cdot\pi\cdot a}{P\cdot\sqrt{1-\varepsilon^2}}\cdot\frac{1+\varepsilon\cdot\cos\theta}{r}$$

Ora all'**Afelio** con i seguenti valori:

$$a = 2{,}6840\cdot 10^{12}\ m\ ;\ P = 2{,}3983\cdot 10^{9}\,sec\ ;\ \varepsilon = 0{,}96727700\ ;\ r = 5{,}2802\cdot 10^{12}\ m\ ;\ \theta = 180°$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che la velocità angolare, vale:

$$\omega_{Afelio} = 1{,}71752\cdot 10^{-10}\ \frac{rad}{sec}$$

All'**Afelio** la velocità angolare ω poteva essere determinata anche attraverso la relazione:

$$\omega_{Afelio} = \frac{v_{yAfelio}}{r_2} = \frac{906{,}8644}{5{,}2802\cdot 10^{12}} = 1{,}71748\cdot 10^{-10}\ \frac{rad}{sec}$$

Come si vede i due valori così calcolati, sono pressoché coincidenti.

Per determinare **l'accelerazione orbitale all'Afelio**, ossia alla massima distanza dal Sole, usiamo le relazioni valide per l'ellisse in coordinate cartesiane, in cui **x sia compreso fra:**

il punto di Afelio ≤ x ≤ ed il punto di metà ellisse

$$-a-\sqrt{a^2-b^2} \le x \le -\sqrt{a^2-b^2}$$

$$-5{,}2802 \cdot 10^{12} \le x \le -2{,}59617 \cdot 10^{12}$$

La componente dell'accelerazione orbitale **lungo l'asse x,** vale:

$$\ddot{x} = -\frac{4 \cdot a^4 \cdot \dot{S}^2 \cdot x}{b^2 \cdot \left(b^2 - \sqrt{a^2-b^2} \cdot x\right)^3}$$

e, **all'Afelio**, con i seguenti valori:

$$a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}\,m \;;\; b = 6{,}8099 \cdot 10^{11}\,m \;;\; \dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15}\,\frac{m^2}{sec} \;;\; x = r_2 = -5{,}2802 \cdot 10^{12}\,m$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$a_{x\,Afelio} = 4{,}7597 \cdot 10^{-6}\,\frac{m}{sec^2}$$

La componente dell'accelerazione orbitale **lungo l'asse y,** vale:

$$\ddot{y} = -\frac{4 \cdot a \cdot b \cdot \dot{S}^2 \cdot y}{\left(a \cdot b + \sqrt{a^2-b^2} \cdot \sqrt{b^2-y^2}\right)^3}$$

e, **all'Afelio**, con i seguenti valori:

$$a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}\,m \;;\; b = 6{,}8099 \cdot 10^{11}\,m \;;\; \dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15}\,\frac{m^2}{sec} \;;\quad y = 0$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$a_{y\,Afelio} = 0$$

Il **modulo dell'accelerazione all'Afelio** è dato dalla seguente relazione:

$$a_A = \sqrt{\frac{16 \cdot a^2 \cdot \dot{S}^4}{b^4} \cdot \left(\frac{a^6 \cdot x^2}{\left(b^2 - \sqrt{a^2-b^2} \cdot x\right)^6} + \frac{b^6 \cdot y^2}{\left(a \cdot b + \sqrt{a^2-b^2} \cdot \sqrt{b^2-y^2}\right)^6}\right)}$$

con i seguenti valori:

$$a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}\,m \quad ; \quad b = 6{,}8099 \cdot 10^{11}\,m \quad ; \quad \dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15}\,\frac{m^2}{sec} \;;$$

$$x = r_2 = -5{,}2802 \cdot 10^{12}\,m \quad ; \quad y = 0$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$a_{Afelio} = 4{,}7597 \cdot 10^{-6} = 0{,}0000047597\,\frac{m}{sec^2}$$

Verifichiamo i risultati ottenuti.

Ora, sappiamo che, per una traiettoria ellittica in coordinate polari, la velocità orbitale lineare **v**, può esprimersi come segue:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{a^2}{1-\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{P}\right)^2 \cdot (\ 1 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \cos\theta + \varepsilon^2\ )}$$

Allora, al **Perielio** con i valori dati e tenendo conto che l'anomalia **θ = 0°,** si trova che la velocità vale:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{(2{,}6840 \cdot 10^{12})^2}{1 - 0{,}967277^2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{2{,}3983 \cdot 10^9}\right)^2 \cdot (\ 1 + 2 \cdot 0{,}967277 \cdot \cos 0° + 0{,}967277^2\ )} =$$

$$= 54.521{,}1582\ \frac{m}{sec}$$

mentre all'**Afelio** con i valori dati e tenendo conto che l'anomalia **θ = 180°,** si trova che la velocità vale:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{(2{,}6840 \cdot 10^{12})^2}{1 - 0{,}967277^2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{2{,}3983 \cdot 10^9}\right)^2 \cdot (\ 1 + 2 \cdot 0{,}967277 \cdot \cos 180° + 0{,}967277^2\ )} =$$

$$= 906{,}8859\ \frac{m}{sec}$$

Come si vedono, questi due valori sono pressoché coincidenti con quelli determinati precedentemente.

Inoltre, sappiamo che, il rapporto tra la velocità della cometa orbitante al Perielio (minima distanza dal Sole) ed all'Afelio (massima distanza da esso) si può esprimere come:

$$\frac{v_{Perielio}}{v_{Afelio}} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

Sostituendo i valori, calcolati precedentemente, si trova:

$$\frac{v_{Perielio}}{v_{Afelio}} = \frac{54.519{,}8575}{906{,}7170} = 60{,}1289$$

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{1 + 0{,}967277}{1 - 0{,}967277} = 60{,}1191$$

Come si vede questi due valori sono pressoché coincidenti.

Per **le accelerazioni orbitali osserviamo** che, il rapporto tra le accelerazioni al Perielio ed all'Afelio, è dato dà :

$$\frac{a_{Perielio}}{a_{Afelio}} = \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2$$

allora:

$$\frac{a_{Perielio}}{a_{Afelio}} = \frac{0{,}0172041}{0{,}0000047597} = 3.614{,}5345$$

mentre:

$$\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 = 60{,}1191^2 = 3.614{,}3062$$

Come si vede anche questi valori sono pressoché coincidenti.

Ricordando poi, che in un moto centrale, l'accelerazione radiale e quindi la forza radiale è inversamente proporzionale al quadrato della distanza, si ha, che accelerazione radiale è data dà:

$$\mathbf{a}_\rho = -\frac{\mathbf{C}^2}{\mathbf{p}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}^2}$$ (il segno meno indica che l'accelerazione è diretta sempre lungo il centro di attrazione – il sole)

Ora:

$$\mathbf{C} = 2 \cdot \dot{\mathbf{S}} = 2 \cdot 2{,}3942 \cdot 10^{15} = 4{,}7884 \cdot 10^{15}\ \frac{\mathbf{m}^2}{\mathbf{sec}}$$, costante areale o areolare

$\mathbf{p} = 1{,}7278 \cdot 10^{11}\ \mathbf{m}$ parametro

$\mathbf{r_1} =$ Distanza della cometa al **perielio** $= \mathbf{8{,}7829 \cdot 10^{10}\ m}$

$\mathbf{r_2} =$ Distanza della cometa all'**afelio** $= \mathbf{5{,}2802 \cdot 10^{12}\ m}$

Al perielio:

$$\mathbf{a}_\rho = -\frac{\mathbf{C}^2}{\mathbf{p}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}^2} = -\frac{(4{,}7884\cdot 10^{15})^2}{1{,}7278\cdot 10^{11}}\cdot\frac{1}{(8{,}7829\cdot 10^{10})^2} = -0{,}0172032\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{sec}^2}$$

All'afelio:

$$\mathbf{a}_\rho = -\frac{\mathbf{C}^2}{\mathbf{p}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}^2} = -\frac{(4{,}7884\cdot 10^{15})^2}{1{,}7278\cdot 10^{11}}\cdot\frac{1}{(5{,}2802\cdot 10^{12})^2} = -0{,}0000047598\ \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{sec}^2}$$

Come si vede abbiamo ottenuto i medesimi valori precedentemente calcolati.

Inoltre, nel moto centrale sappiamo che:

il **parametro p** della traiettoria ellittica può essere determinato anche attraverso la seguente relazione,

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{C}^2}{\mathbf{K}\cdot\mathbf{M_S}}$$

dove:

$\mathbf{K}$ = costante gravitazionale = $\mathbf{6{,}67259 \cdot 10^{-11}}\ \frac{\mathbf{N}\cdot\mathbf{m}^2}{\mathbf{Kg}^2}$

$\mathbf{M_S}$ = massa del sole = $\mathbf{1{,}9891 \cdot 10^{30}\ Kg}$

Quindi:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{C}^2}{\mathbf{K}\cdot\mathbf{M_S}} = \frac{(4{,}7885\cdot 10^{15})^2}{6{,}67259\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}9891\cdot 10^{30}} = 1{,}7276 \cdot 10^{11}\ \mathbf{m}$$

Come si vede abbiamo ottenuto il medesimo valore precedentemente calcolato.

A questo punto, si osserva che, per determinare la velocità orbitale della cometa al Perielio ed all'Afelio, potevamo procedere anche in questo modo.

L'ENERGIA TOTALE della cometa all'Afelio (massima distanza dal Sole) sappiamo essere data dalla somma dell'**energia cinetica** e dell'**energia potenziale**, ossia:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\cdot \mathbf{m}\cdot \mathbf{v}_A^2 - \frac{\mathbf{K}\cdot\mathbf{m}\cdot\mathbf{M_S}}{\mathbf{R}+\mathbf{h}_2} \qquad (1)$$

dove:

h = altezza del satellite o della cometa dalla superficie del Sole, quindi:

all'Afelio: $\mathbf{h_2 = r_2 - R = 5{,}2802 \cdot 10^{12} - 6{,}9599 \cdot 10^{8} = 5{,}2795 \cdot 10^{12}\ m}$;

mentre al Perielio: $\mathbf{h_1 = r_1 - R = 8{,}7829 \cdot 10^{10} - 6{,}9599 \cdot 10^{8} = 8{,}7133 \cdot 10^{10}\ m}$;

$\mathbf{v_A}$ = $\mathbf{v_P}$ = velocità della cometa all'Afelio e al Perielio, in **m/sec** ;

$\mathbf{r_1}$ = minima distanza dal centro del Sole = $\mathbf{8{,}7829 \cdot 10^{10}}$ **m** ;

$\mathbf{r_2}$ = massima distanza dal centro del Sole = $\mathbf{5{,}2802 \cdot 10^{12}}$ **m** ;

m = massa della Cometa Halley, **incognita**;

$\mathbf{M_S}$ = massa del Sole = $\mathbf{1{,}9891 \cdot 10^{30}}$ **Kg ;**

R = raggio del Sole = $\mathbf{6{,}9599 \cdot 10^{8}}$ **m ;**

a = semiasse maggiore dell'orbita della cometa = $\mathbf{2{,}6840 \cdot 10^{12}}$ **m**

K = costante gravitazionale = $\mathbf{6{,}67259 \cdot 10^{-11}} \ \dfrac{\mathbf{N \cdot m^2}}{\mathbf{Kg^2}} = \dfrac{\mathbf{m^3}}{\mathbf{Kg \cdot sec^2}}$

Inoltre, sappiamo che, **l'energia totale E**, ed **il momento della quantità di moto L**, nel caso di moto ellittico, in funzione del semiasse maggiore **a** e dell'eccentricità **ε** dell'ellisse, valgono**:**

$$\mathbf{E = -\frac{K \cdot m \cdot M_S}{2 \cdot a}} \qquad (2)$$

$$\mathbf{L^2 = K \cdot m^2 \cdot M_S \cdot a \cdot (1 - \varepsilon^2)} \qquad (3)$$

Se nell'equazione **(3)** eliminiamo il semiasse maggiore **a** usando l'equazione **(2)**, otteniamo che l'eccentricità dell'orbita vale:

$$\mathbf{\varepsilon^2 = 1 + \frac{2 \cdot E}{m} \cdot \left(\frac{L}{K \cdot m \cdot M_S} \right)^2} \qquad (4)$$

Se nell'equazione **(4),** all'energia totale **E,** sostituiamo il valore dell'energia totale, data dall'equazione **(1)** che la Cometa Halley acquista all'Afelio, si ottiene:

$$\mathbf{\varepsilon^2 = 1 + \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 - \frac{K \cdot m \cdot M_S}{R + h_2} \right)}{m} \cdot \left(\frac{L}{K \cdot m \cdot M_S} \right)^2}$$

Se ad **L** sostituiamo il valore dato dalla **(3)** abbiamo:

$$\mathbf{\varepsilon^2 = 1 + \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 - \frac{K \cdot m \cdot M_S}{R + h_2} \right)}{m} \cdot \left(\frac{1}{K \cdot m \cdot M_S} \right)^2 \cdot K \cdot m^2 \cdot M_S \cdot a \cdot (1 - \varepsilon^2)}$$

questa equazione semplificata e riordinata diviene:

$$\mathbf{\varepsilon^2 = 1 + \frac{a \cdot (1 - \varepsilon^2) \cdot \left(-\frac{2 \cdot K \cdot M_S}{R + h_2} + v_A^2 \right)}{K \cdot M_S}}$$

Ora siamo in grado di ricavare $\mathbf{v_A}$ da questa equazione, per cui otteniamo:

$$\mathbf{v_A = \pm \frac{\sqrt{1 - \frac{2 \cdot a}{R + h_2} - \varepsilon^2 + \frac{2 \cdot a \cdot \varepsilon^2}{R + h_2}}}{\sqrt{-\frac{a}{K \cdot M_S} + \frac{a \cdot \varepsilon^2}{K \cdot M_S}}} = \pm \sqrt{\frac{K \cdot M_S \cdot (2 \cdot a - R - h_2)}{a \cdot (R + h_2)}}}$$

Non consideriamo la soluzione negativa, in quanto non ha nessun significato fisico. Per cui, in definitiva, si ha che **la velocità orbitale della Cometa all'Afelio** quando la sua massima distanza dal centro del Sole è $\mathbf{r_2}$, vale

$$\mathbf{v_{Afelio}} = \sqrt{\frac{\mathbf{K \cdot M_S \cdot (2 \cdot a - R - h_2)}}{\mathbf{a \cdot (R + h_2)}}}$$

Mentre, con un analogo ragionamento, si ottiene l'equazione, valida per determinare **la velocità orbitale della Cometa al Perielio** quando la sua minima distanza dal centro del Sole è $\mathbf{r_1}$.

Ossia, sostituendo ad $\mathbf{h_2}$, $\mathbf{h_1}$ abbiamo:

$$\mathbf{v_{Perielio}} = \sqrt{\frac{\mathbf{K \cdot M_S \cdot (2 \cdot a - R - h_1)}}{\mathbf{a \cdot (R + h_1)}}}$$

Se a queste equazioni, sostituiamo i rispettivi valori si ottiene:

per **la velocità orbitale al Perielio:**

$$\mathbf{v_{Perielio}} = \sqrt{\frac{6{,}67259 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30} \cdot (2 \cdot 2{,}6840 \cdot 10^{12} - 6{,}9599 \cdot 10^{8} - 8{,}7133 \cdot 10^{10})}{2{,}6840 \cdot 10^{12} \cdot (6{,}9599 \cdot 10^{8} + 8{,}7133 \cdot 10^{10})}} =$$

$$= \mathbf{54.524{,}2026 \ \frac{m}{sec}}$$

per **la velocità orbitale all'Afelio:**

$$\mathbf{v_{Afelio}} = \sqrt{\frac{6{,}67259 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30} \cdot (2 \cdot 2{,}6840 \cdot 10^{12} - 6{,}9599 \cdot 10^{8} - 5{,}2795 \cdot 10^{12})}{2{,}6840 \cdot 10^{12} \cdot (6{,}9599 \cdot 10^{8} + 5{,}2795 \cdot 10^{12})}} =$$

$$= \mathbf{906{,}8102 \ \frac{m}{sec}}$$

Come si vede abbiamo ottenuto i medesimi valori precedentemente calcolati.

A questo punto, ricordiamo che esiste una relazione tra queste due velocità, data da:

$$\frac{\mathbf{v_{Perielio}}}{\mathbf{v_{Afelio}}} = \frac{\mathbf{1 + \varepsilon}}{\mathbf{1 - \varepsilon}}$$

Quindi, sostituendo i rispettivi valori, vediamo se è verificata:

$$\frac{\mathbf{v_{Perielio}}}{\mathbf{v_{Afelio}}} = \frac{\mathbf{54.305{,}8604}}{\mathbf{903{,}1285}} = \mathbf{60{,}1308} \text{ mentre sappiamo che } \frac{\mathbf{1 + \varepsilon}}{\mathbf{1 - \varepsilon}} = \frac{\mathbf{1 + 0{,}967277}}{\mathbf{1 - 0{,}967277}} = \mathbf{60{,}1191}$$

Come si vede i due rapporti sono pressoché coincidenti.

Per il calcolo del **Periodo di rivoluzione** della Cometa sappiamo che esso è dato dalla Terza Legge di Keplero: *"I quadrati dei tempi di rivoluzione dei pianeti, stanno tra loro nello stesso rapporto dei cubi delle rispettive distanze medie"*, la quale viene rappresentata dalla seguente relazione:

$$\mathbf{P^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot a^3}{K \cdot M_S}}$$

$$\mathbf{P = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{K \cdot M_S}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{(2{,}6840 \cdot 10^{12})^3}{6{,}67259 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30}}} = 2{,}3982 \cdot 10^9 \ sec}$$

Come si vede abbiamo ottenuto il medesimo valore precedentemente calcolato.

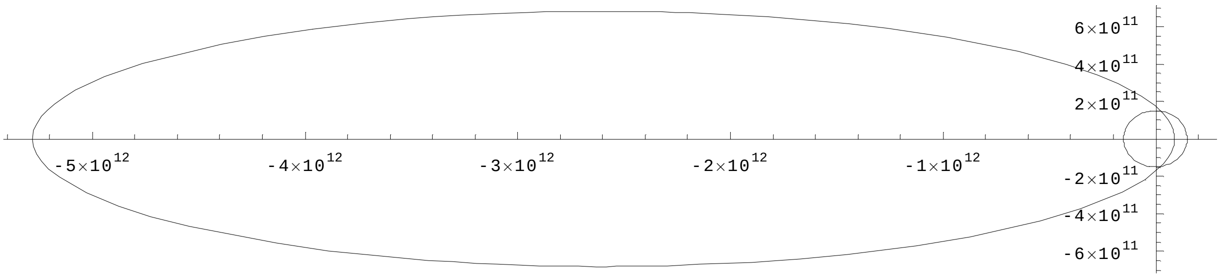
Infine: scriviamo la traiettoria in coordinate polari della **Cometa Halley** attorno al Sole:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{p}}{1+\varepsilon\cdot\cos\theta} = \frac{1{,}7278\cdot 10^{11}}{1+0{,}967277\cdot\cos\theta} \qquad \mathbf{m}$$

e la traiettoria in coordinate polari della **Terra** intorno al Sole, che sappiamo essere data dà:

$$\rho = \frac{1{,}4948\cdot 10^{11}}{1+0{,}016508\cdot\cos\theta} \qquad \mathbf{m}$$

Queste due equazioni riportate in un diagramma polare, permettono di vedere (nel loro rapporto reale) sia la traiettoria della Cometa Halley intorno al Sole, sia la traiettoria della Terra intorno al Sole.



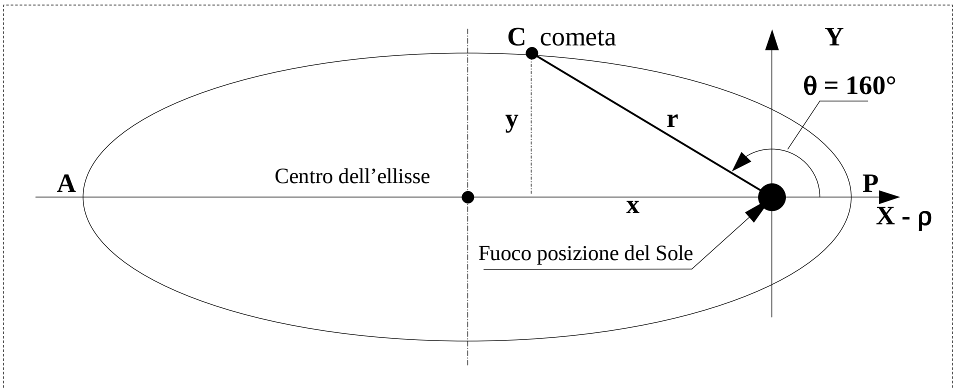
****

Ora, supponiamo che, l'anomalia θ del raggio vettore **r** della Cometa Halley sia:

$$\theta = 160\,°$$

Ci proponiamo allora di determinare i parametri del moto della cometa quando si trova in tale punto, indicato con **C**.

Dalla seguente **Figura** si osserva che il moto della cometa avviene lungo la traiettoria ellittica, per cui,



l'equazione polare della traiettoria della cometa, è la seguente:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{p}}{1+\varepsilon\cdot\cos\theta}$$

Se sostituiamo i corrispondenti valori, l'equazione diviene:

$$\mathbf{r_C} = \frac{1{,}7278\cdot 10^{11}}{1+0{,}967277\cdot\cos\theta} \qquad \mathbf{m}$$

per cui si trova che, in tale punto, la distanza **r** della cometa dal sole, con $\theta = 160\,°$ vale:

$$\mathbf{r_C} = \frac{1{,}7278\cdot 10^{11}}{1+0{,}967277\cdot\cos\theta} = \frac{1{,}7278\cdot 10^{11}}{1+0{,}967277\cdot\cos 160} = 1{,}8975\cdot 10^{12} \quad \mathbf{m}$$

Inoltre, come si vede dalla **Figura**, le coordinate **x, y** della cometa, riferite ad un sistema di assi cartesiani ortogonali con l'origine nel centro nel Sole, il quale occupa uno dei due fuochi, sono:

$$\mathbf{x = r_C \cdot \cos\theta = 1{,}8975 \cdot 10^{12} \cdot \cos 160 = -1{,}7831 \cdot 10^{12} \ \ m}$$

$$\mathbf{y = r_C \cdot sen\,\theta = 1{,}8975 \cdot 10^{12} \cdot sen\, 160 = 6{,}4898 \cdot 10^{11} \ \ m}$$

A questo punto, siamo in grado di determinare la velocità e l'accelerazione orbitale della cometa, quando si trova in **C**.

Per determinare **la velocità orbitale della Cometa** alla distanza dal Sole:

$$\mathbf{r_C = 1{,}8975 \cdot 10^{12} \ \ m}$$

usiamo le relazioni valide, **per x compreso fra:**

il punto di metà ellisse ≤ x ≤ ed il punto di Perielio

$$-\sqrt{a^2 - b^2} \le x \le a - \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$-2{,}59617 \cdot 10^{12} \le x \le 8{,}7829 \cdot 10^{10}$$

La componente della velocità orbitale **lungo l'asse x,** vale:

$$\dot{x} = -\frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \dot{S} \cdot \sqrt{b^2 - 2 \cdot \sqrt{a^2 - b^2} \cdot x - x^2}}{b^4 - b^2 \cdot \sqrt{a^2 - b^2} \cdot x}$$

e, **al punto C**, con i seguenti valori:

$$\mathbf{a = 2{,}6840 \cdot 10^{12} \ m \ ; \ b = 6{,}8099 \cdot 10^{11} \ m \ ; \ \dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15} \ \frac{m^2}{sec} \ ; \ x_C = -1{,}7831 \cdot 10^{12}\, m}$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$\mathbf{v_{Cx} = -9.478{,}5286 \ \frac{m}{sec} = -34.122{,}7030 \approx -34.123 \ \frac{Km}{h}}$$

La componente della velocità orbitale **lungo l'asse y,** vale:

$$\dot{y} = \frac{2 \cdot \dot{S} \cdot \sqrt{b^2 - y^2}}{a \cdot b - \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{b^2 - y^2}}$$

e, **al punto C**, con i seguenti valori:

$$\mathbf{a = 2{,}6840 \cdot 10^{12} \ m \ ; \ b = 6{,}8099 \cdot 10^{11} \ m \ ; \ \dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15} \ \frac{m^2}{sec} \ ; \ y_C = 6{,}4898 \cdot 10^{11} \ m}$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$\mathbf{v_{Cy} = 764{,}6375 \ \frac{m}{sec} = 2.752{,}6950 \approx 2.753 \ \frac{Km}{h}}$$

Il **modulo della velocità orbitale nel punto C** è dato dalla seguente relazione:

$$v_C = \sqrt{4 \cdot \dot{S}^2 \cdot \left(\frac{a^2 \cdot \left(b^2 - 2 \cdot \sqrt{a^2 - b^2} \cdot x - x^2 \right)}{\left(b^3 - b \cdot \sqrt{a^2 - b^2} \cdot x \right)^2} + \frac{b^2 - y^2}{\left(a \cdot b - \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{b^2 - y^2} \right)^2} \right)}$$

con i seguenti valori:

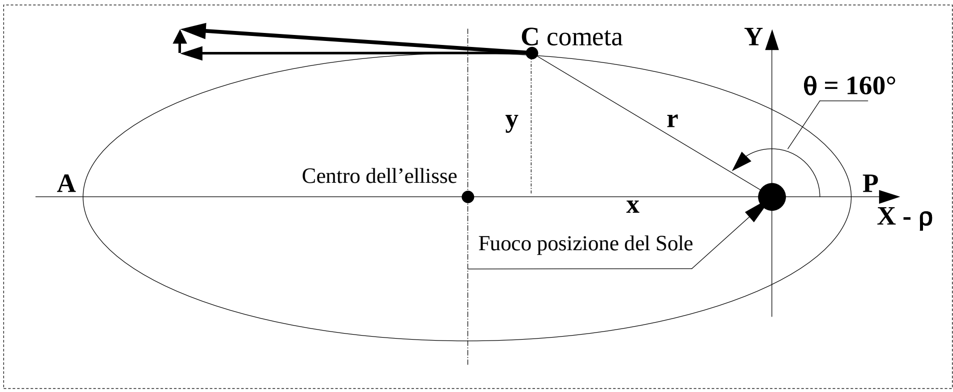
$$\mathbf{a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}\ m \quad ; \quad b = 6{,}8099 \cdot 10^{11}\ m \quad ; \quad \dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15}\ \frac{m^2}{sec}}$$

$$\mathbf{x_C = -1{,}7831 \cdot 10^{12}\, m \quad ; \quad y_C = 6{,}4898 \cdot 10^{11}\ m}$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$\mathbf{v_C = 9.509{,}6215\ \frac{m}{sec} = 9{,}509\ \frac{Km}{sec} = 34.235\ \frac{Km}{h}}$$

Riportiamo i valori calcolati nella seguente **Figura.**



A questo punto, verifichiamo i risultati ottenuti.

Ricordando che l'equazione della tangente in un punto **C**, dell'ellisse con l'origine **O** degli assi coordinati nel centro dell'ellisse stessa,

$$\text{di dati} \quad \begin{cases} \mathbf{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1} \\ \\ \mathbf{C \equiv (x_0\, ,\, y_0)\ ;} \end{cases}$$

l'equazione della tangente è:

$$\mathbf{\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1}$$

Ora, tenendo conto, di quanto detto, in merito alla posizione del centro dell'ellisse, l'equazione della tangente, che è poi la direzione della velocità della cometa $\mathbf{v_C}$, diviene:

$$\mathbf{\frac{(2{,}6840 \cdot 10^{12} - 1{,}7831 \cdot 10^{12} - 8{,}7829 \cdot 10^{10}) \cdot x}{(2{,}6840 \cdot 10^{12})^2} + \frac{6{,}4898 \cdot 10^{11} \cdot y}{(6{,}8099 \cdot 10^{11})^2} = 1}$$

ossia:

$$\mathbf{y = 7{,}1457885 \cdot 10^{11} - 0{,}0806517 \cdot x}$$

Come si vede, il modulo del coefficiente angolare della tangente, vale:

$$\mathbf{m = 0{,}0806517 \Rightarrow \alpha = 4{,}6110°}$$

Mentre il modulo del coefficiente angolare derivato dal triangolo delle velocità precedentemente calcolate, risulta:

$$\mathbf{m_0 = Tang\,\alpha = \frac{v_{Cy}}{v_{Cx}} = \frac{764{,}6375}{9.478{,}5286} = 0{,}080670485 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4{,}6121°}$$

Come si vede i due valori sono pressoché coincidenti.

Il coefficiente angolare della tangente nel punto **C**, che rappresenta la direzione della velocità orbitale della cometa $\mathbf{v_C}$, può essere determinato, anche, usando l'equazione cartesiana della traiettoria e ricordando poi, il significato geometrico della derivata prima nel punto **C** che si considera, e che rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla traiettoria.

Allora, l'equazione della traiettoria, come abbiamo visto, considerando la parte positiva, è:

$$\mathbf{y = +3{,}7258 \cdot 10^{-13} \cdot \sqrt{2{,}1506 \cdot 10^{47} - 2{,}4079 \cdot 10^{36} \cdot x - 4{,}6375 \cdot 10^{23} \cdot x^2}}$$

mentre la derivata prima vale:

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{1{,}8629 \cdot 10^{-13} \cdot (-2{,}4079 \cdot 10^{36} - 9{,}275 \cdot 10^{23} \cdot x)}{\sqrt{2{,}1506 \cdot 10^{47} - 2{,}4079 \cdot 10^{36} \cdot x - 4{,}6375 \cdot 10^{23} \cdot x^2}}}$$

e per

$$\mathbf{x = -1{,}7831 \cdot 10^{12} \ m}$$

assume il valore:

$$\mathbf{m_0 = Tang\,\alpha = \frac{dy}{dx} = -0{,}0806469}$$

Come si vede questo valore è pressoché coincidente con i valori precedentemente calcolati.

Infine, verifichiamo il valore trovato per la velocità orbitale lineare **v**, usando la relazione precedentemente vista:

$$\mathbf{v = \sqrt{\frac{a^2}{1-\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{P}\right)^2 \cdot (1 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \cos\theta + \varepsilon^2)}}$$

Allora, per il punto **C**, con i valori dati e tenendo conto che l'anomalia $\boldsymbol{\theta = 160°}$ **,** si trova che la velocità orbitale vale:

$$\mathbf{v = \sqrt{\frac{(2{,}6840 \cdot 10^{12})^2}{1 - 0{,}967277^2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{2{,}3983 \cdot 10^9}\right)^2 \cdot (1 + 2 \cdot 0{,}967277 \cdot \cos 160° + 0{,}967277^2)} =}$$

$$\mathbf{= 9.509{,}5218 \ \frac{m}{sec}}$$

Come si vede abbiamo ottenuto il medesimo valore precedentemente calcolato.

Mentre, la velocità $\mathbf{v_C}$ precedentemente calcolata nel punto **C,** la confrontiamo con il valore che si ottiene dall'equazione che deriva dal principio di conservazione dell'energia totale e dal principio di conservazione del momento della quantità di moto, che abbiamo visto essere:

$$\mathbf{v = \sqrt{\frac{K \cdot M_S \cdot (2 \cdot a - R - h)}{a \cdot (R + h)}}}$$

Ora, se a questa equazione, sostituiamo i rispettivi valori, tenendo presente che:

$$\mathbf{h = r_C - R = 1{,}8975 \cdot 10^{12} - 6{,}9599 \cdot 10^8 = 1{,}8968 \cdot 10^{12} \ m}$$

si trova per **la velocità orbitale nel punto C:**

$$\mathbf{v_{Perielio} = \sqrt{\frac{6{,}67259 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30} \cdot (2 \cdot 2{,}6840 \cdot 10^{12} - 6{,}9599 \cdot 10^8 - 1{,}8968 \cdot 10^{12})}{2{,}6840 \cdot 10^{12} \cdot (6{,}9599 \cdot 10^8 + 1{,}8968 \cdot 10^{12})}} =}$$

$$\mathbf{= 9.510{,}2102 \ \frac{m}{sec}}$$

Come si vede i valori sono pressoché coincidenti.

Per determinare **la velocità angolare nel punto C**, ossia alla distanza dal Sole,

$$\mathbf{r_C = 1{,}8975 \cdot 10^{12} \ m}$$

usiamo la relazione precedentemente vista:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{2 \cdot \pi \cdot a}{P \cdot \sqrt{1-\varepsilon^2}} \cdot \frac{1+\varepsilon \cdot \cos\theta}{r}$$

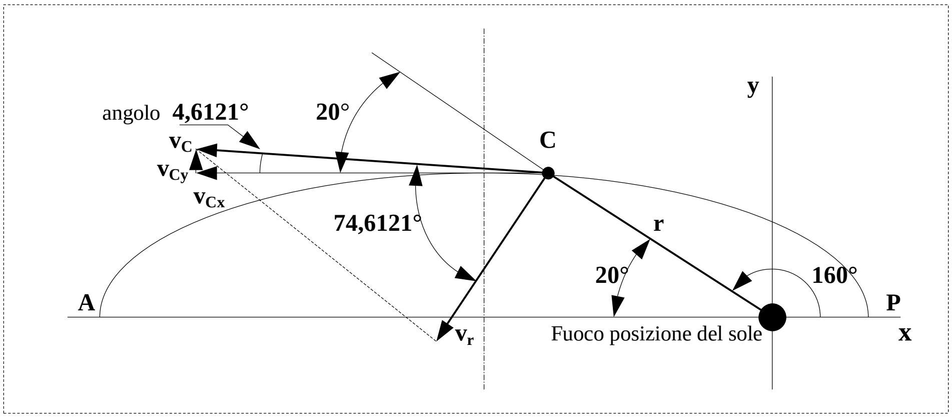
Ora nel punto **C** con i seguenti valori:

$\mathbf{a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}\ m\ ;\ P = 2{,}3983 \cdot 10^{9}\ sec\ ;\ \varepsilon = 0{,}96727700\ ;\ r = 1{,}8975 \cdot 10^{12}\ m\ ;\ \theta = 160°}$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che la velocità angolare, vale:

$$\omega_C = 1{,}32994 \cdot 10^{-9} \ \frac{rad}{sec}$$

Nel punto **C** la **velocità angolare** ω può essere determinata anche attraverso la relazione che si ottiene dal triangolo della velocità orbitale nel medesimo punto della seguente **Figura**:



ossia,

$$\omega_C = \frac{v_r}{r} = \frac{v_C \cdot \cos 74{,}6121°}{r} = \frac{9.509{,}6215 \cdot \cos 74{,}6121}{1{,}8975 \cdot 10^{12}} = 1{,}3299 \cdot 10^{-9} \ \frac{rad}{sec}$$

Come si vede i due valori così calcolati, sono pressoché coincidenti.

Per determinare **l'accelerazione orbitale nel punto C**, ossia alla distanza dal Sole,

$$\mathbf{r_C = 1{,}8975 \cdot 10^{12} \ m}$$

usiamo le relazioni valide, **per x compreso fra:**

il punto di metà ellisse ≤ x ≤ ed il punto di Perielio

$$-\sqrt{a^2 - b^2} \le x \le a - \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$-2{,}59617 \cdot 10^{12} \le x \le 8{,}7829 \cdot 10^{10}$$

La componente dell'**accelerazione orbitale lungo l'asse x,** vale:

$$\ddot{x} = -\frac{4 \cdot a^4 \cdot \dot{S}^2 \cdot x}{b^2 \cdot \left(b^2 - \sqrt{a^2 - b^2} \cdot x\right)^3}$$

e, nel **punto C**, con i seguenti valori:

$\mathbf{a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}\ m\ ;\ b = 6{,}8099 \cdot 10^{11}\ m\ ;\ \dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15}\ \frac{m^2}{sec}\ ;\ x = -1{,}7831 \cdot 10^{12}\, m}$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$\mathbf{a_{Cx} = 0{,}0000346329 \ \frac{m}{sec^2}}$$

La componente dell'**accelerazione orbitale lungo l'asse y,** vale:

$$\ddot{y} = -\frac{4 \cdot a \cdot b \cdot \dot{S}^2 \cdot y}{\left(a \cdot b - \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{b^2 - y^2}\right)^3}$$

e, **al punto C**, con i seguenti valori:

$$\mathbf{a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}\ m \ ;\ b = 6{,}8099 \cdot 10^{11}\ m \ ;\ \dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15}\ \frac{m^2}{sec} \ ;\ \ y = 6{,}4898 \cdot 10^{11}\ m}$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$\mathbf{a_{Cy} = -0{,}0000126078 \ \frac{m}{sec^2}}$$

Il **modulo dell'accelerazione orbitale nel punto C** è dato dalla seguente relazione:

$$a_C = \sqrt{\frac{16 \cdot a^2 \cdot \dot{S}^4}{b^4} \cdot \left(\frac{a^6 \cdot x^2}{\left(b^2 - \sqrt{a^2 - b^2} \cdot x\right)^6} + \frac{b^6 \cdot y^2}{\left(a \cdot b - \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{b^2 - y^2}\right)^6}\right)}$$

con i seguenti valori:

$$\mathbf{a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}\ m \quad ; \quad b = 6{,}8099 \cdot 10^{11}\ m \quad ; \quad \dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15}\ \frac{m^2}{sec}}$$

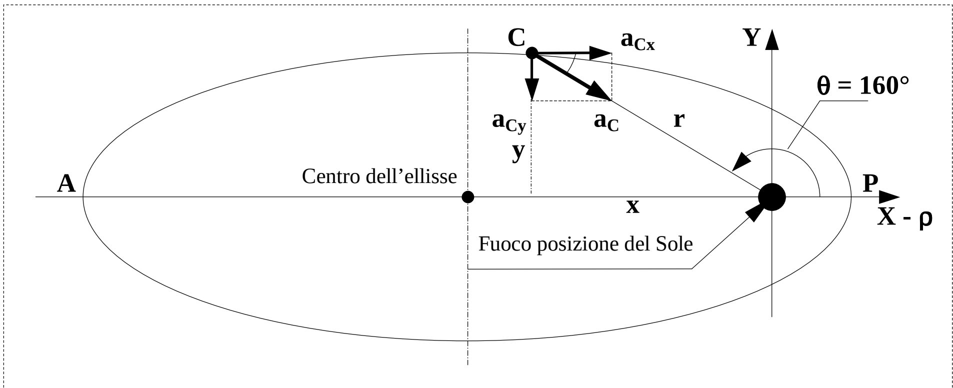
$$\mathbf{x = -1{,}7831 \cdot 10^{12}\ m \quad ; \quad y = 6{,}4898 \cdot 10^{11}\ m}$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$\mathbf{a_C = 0{,}0000368564 \ \frac{m}{sec^2}}$$

Ora, dalla **Figura** sotto riportata, si osserva che:

$$\mathbf{tang\ \alpha_0 = \frac{a_{Cy}}{a_{Cx}}} \quad \text{da cui} \quad \mathbf{\alpha_0 = arctang\ \frac{a_{Cy}}{a_{Cx}} = arctang\ \frac{0{,}0000126078}{0{,}0000346329} \ \Rightarrow\ \alpha_0 = 20{,}0036\ °}$$



ossia, i due angoli alterni interni sono uguali.

Per quanto riguarda l'accelerazione $\mathbf{a_C}$ precedentemente calcolata nel punto **C**, confrontiamo i risultati ottenuti con il valore che si ottiene dalla relazione:

$$\mathbf{a_\rho = -\frac{C^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}}$$

la quale, con i valori di:

$$\mathbf{C = 2 \cdot \dot{S} = 2 \cdot 2{,}3942 \cdot 10^{15} = 4{,}7884 \cdot 10^{15}\ \frac{m^2}{sec}}$$

$$\mathbf{p = 1{,}7278 \cdot 10^{11}\ m}$$

$\mathbf{r_C =}$ Distanza della cometa al punto C, dal sole $\mathbf{= 1{,}8975 \cdot 10^{12}\ m}$

dà per l'accelerazione radiale il valore:

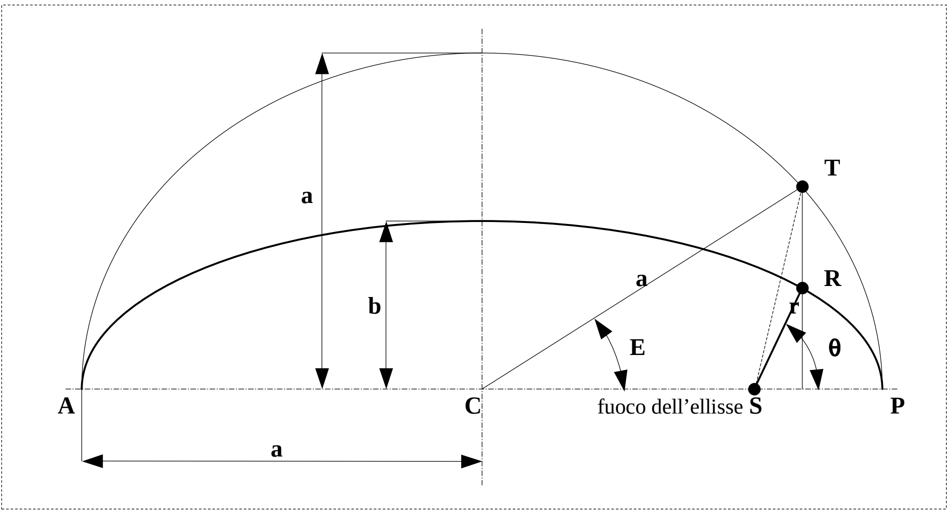
$$\mathbf{a_\rho = -\frac{C^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2} = -\frac{(4{,}7884 \cdot 10^{15})^2}{1{,}7278 \cdot 10^{11}} \cdot \frac{1}{(1{,}8975 \cdot 10^{12})^2} = 3{,}6857 \cdot 10^{-5} = 0{,}000036857\ \frac{m}{sec^2}}$$

Come si vede i due valori sono pressoché coincidenti.

Ora ci poniamo il problema di determinare il tempo **t** che impiega la Cometa Halley, dall'istante (**T = 0**), ossia da quando transita al Perielio, al momento in cui raggiunge il punto **C** di anomalia **θ = 160 ° = 2,79252680319 rad.**

Per far ciò, ci serviamo della soluzione che deriva del cosiddetto **problema di Keplero**.

Dalla seguente **Figura**, si osserva che:



θ rappresenta l'anomalia vera del raggio vettore **r**, mentre:
l'angolo **TCP = E** , viene chiamato **anomalia eccentrica.**
Ora sappiamo che esiste una relazione tra l'**anomalia eccentrica E** e **l'anomalia vera del raggio vettore θ**, e precisamente:

$$\mathbf{\cos E = \frac{\varepsilon + \cos\theta}{1 + \varepsilon \cdot \cos\theta}} \qquad \textbf{(1)}$$

od anche:

$$\mathbf{Tang\left(\frac{1}{2} \cdot \theta\right) = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot Tang\left(\frac{1}{2} \cdot E\right)} \qquad \textbf{(2)}$$

mentre **l'equazione di Keplero** è data dà:

$$\mathbf{E - \varepsilon \cdot sen\, E = M} \qquad \textbf{(3)}$$

dove **M** viene chiamata **anomalia media** e rappresenta la quantità:

$$\mathbf{M = \frac{2 \cdot \pi}{P} \cdot (t - T)} \qquad \textbf{(4)}$$

in cui

P è il periodo di rivoluzione ; **T** l'istante iniziale e **t** l'istante considerato.

Allora per calcolare il tempo necessario dalla Cometa Halley per raggiungere dal Perielio (in cui **T = 0)** il punto **C** dell'orbita ellittica con anomalia θ **= 160 ° = 2,79252680319 rad,** si ha:

$$\cos E = \frac{\varepsilon + \cos\theta}{1 + \varepsilon \cdot \cos\theta} = \frac{0{,}967277 + \cos 2{,}7925268}{1 + 0{,}967277 \cdot \cos 2{,}7925268} = 0{,}3029355$$

da cui:

$$E = 1{,}2630249$$

Questo valore sostituito nella relazione **(3)**, fornisce **M**, ossia:

$$M = 1{,}2630249 - 0{,}967277 \cdot \text{sen}\ 1{,}2630249 = 0{,}341199$$

il quale, sostituito nella relazione **(4)** permette di ottenere il tempo **t** cercato,

$$M = \frac{2 \cdot \pi}{P} \cdot (t - T)$$

ed essendo **T = 0** si trova

$$t = \frac{P \cdot M}{2 \cdot \pi} = \frac{2{,}3983 \cdot 10^9 \cdot 0{,}341199}{2 \cdot \pi} = 1{,}30236 \cdot 10^8 \text{ sec} = 1.507{,}3611 \text{ giorni} = 4{,}1298 \text{ anni}$$

Quindi il punto **C** viene raggiunto dopo un tempo **t = 4,1298 anni** dal passaggio della cometa al Perielio. O meglio, questo punto è stato raggiunto il **27 marzo 1990**.

Usando la **Legge Temporale** data dalla seguente equazione:

$$(t - T) = \frac{a^{1,5}}{\sqrt{K \cdot M_S}} \cdot \left[\arccos\left(\frac{a - r}{a \cdot \varepsilon}\right) - \varepsilon \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a - r}{a \cdot \varepsilon}\right)^2} \right]$$

il punto **C,** con i seguenti valori:

$a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}$ **m ;** $K = 6{,}67259 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{Kg^2}$ **;** $M_S = 1{,}9891 \cdot 10^{30}$ **Kg ;** $\varepsilon = 0{,}96727700$ **;**

$r = 1{,}8975 \cdot 10^{12}$ **m ; T = 0 .**

sostituiti nell'equazione sopra scritta, viene raggiunto nel tempo $t = 1{,}30226 \cdot 10^8$ **sec**

Come si vede i due valori sono pressoché coincidenti.

Usando la relazione che dà il tempo in funzione della posizione orbitale, si ottiene:

a) indicando con μ il parametro gravitazionale dato da:

$$\mu = K \cdot (M_S + m_C) = 6{,}67259 \cdot 10^{-11} \cdot (1{,}9891 \cdot 10^{30} + 6 \cdot 10^{14}) = 1{,}327245 \cdot 10^{20} \ \frac{m^3}{sec^2}$$

avendo indicato con m_C la massa della cometa = $6 \cdot 10^{14}$ **kg**

b) indicando con **L** il momento angolare della cometa che sappiamo essere costante lungo l'orbita, in quanto trattasi di un moto centrale,

$$L = r \cdot m_C \cdot v_{ortogonale}$$

c) indicando con **h** il momento angolare specifico relativo, calcolato per un punto generico dell'orbita

$$h = \frac{L}{m_C} = r \cdot v_{ortogonale} = r^2 \cdot \dot{\theta} = r^2 \cdot \omega$$

Nel nostro caso, scegliendo come punto dell'orbita, il Perielio, abbiamo:

$$\mathbf{h \;=\; r \cdot v_{ortogonale} \;=\; 8{,}7829 \cdot 10^{10} \cdot 54.519{,}8575 \;=\; 4{,}78842 \cdot 10^{15} \;\; \frac{m^2}{sec^2}}$$

Ora, la relazione che lega il tempo alla posizione orbitale è data da:

$$\mathbf{t \;=\; \frac{h^3}{\mu^2} \cdot \int_0^{\theta} \frac{1}{(1+e\cdot\cos\theta)^2}\, d\theta \;=\; \frac{h^3}{\mu^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-e^2)^3}} \cdot \left[2 \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - \frac{e \cdot \sqrt{1-e^2} \cdot sen\theta}{1+e\cdot\cos\theta} \right]}$$

questa equazione con i valori di:

$$\mathbf{\mu = 1{,}327245 \cdot 10^{20} \;\; \frac{m^3}{sec^2} \quad ; \quad h = 4{,}78842 \cdot 10^{15} \;\; \frac{m^2}{sec^2} \quad ; \quad e \;=\; 0{,}967277}$$

diviene:

$$\mathbf{t \;=\; 3{,}8159 \cdot 10^8 \cdot \left[2 \cdot \arctan\left(0{,}128972 \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - \frac{0{,}24542 \cdot sen\theta}{1+0{,}967277\cdot\cos\theta} \right]}$$

e, per

$$\mathbf{\theta \;=\; 160° \;=\; 2{,}79252680319 \text{ rad.}}$$

sostituito nella relazione precedente si trova che

$$\mathbf{t \;=\; 1{,}3020 \cdot 10^8 \;\; sec}$$

valore pressoché coincidente con i valori precedentemente calcolati.

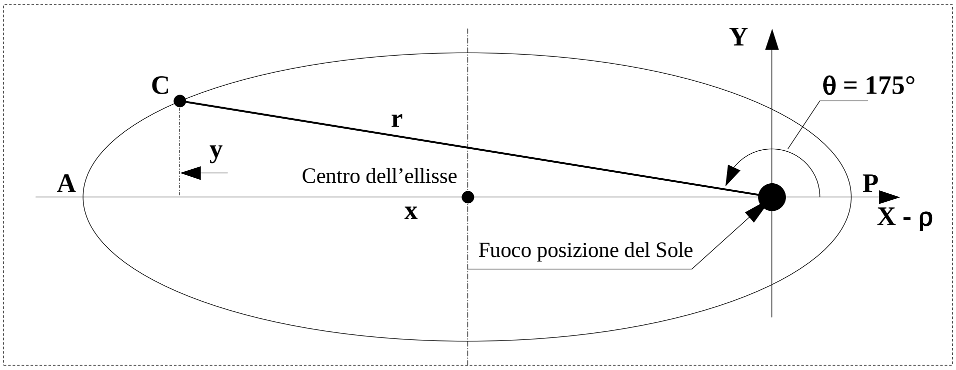
*****

Supponiamo, invece, che l'anomalia θ del raggio vettore **r** della Cometa Halley sia:

$$\mathbf{\theta = 175\,°}$$

Ci proponiamo allora di determinare i parametri del moto della cometa quando si trova in tale punto indicato con **C**.

Dalla seguente **Figura** si osserva che il moto della cometa avviene lungo la traiettoria ellittica, per cui,



l'equazione polare della traiettoria della cometa, è la seguente:

$$\mathbf{r \;=\; \frac{p}{1+\varepsilon\cdot\cos\theta}}$$

Se sostituiamo i corrispondenti valori, l'equazione diviene:

$$\mathbf{r_C \;=\; \frac{1{,}7278 \cdot 10^{11}}{1+0{,}967277\cdot\cos\theta} \qquad m}$$

per cui si trova che, in tale punto, la distanza **r** della cometa dal Sole, con **θ = 175 °** vale:

$$\mathbf{r_C} = \frac{1{,}7278 \cdot 10^{11}}{1+0{,}967277 \cdot \cos\theta} = \frac{1{,}7278 \cdot 10^{11}}{1+0{,}967277 \cdot \cos 175} = 4{,}7462 \cdot 10^{12} \ \ \mathbf{m}$$

Inoltre, come si vede dalla **Figura**, le coordinate **x, y** della cometa, riferite ad un sistema di assi cartesiani ortogonali con centro nel Sole, il quale occupa uno dei due fuochi, sono:

$$x = r_C \cdot \cos\theta = 4{,}7462 \cdot 10^{12} \cdot \cos 175 = -4{,}7281 \cdot 10^{12} \ \ m$$

$$y = r_C \cdot \mathrm{sen}\,\theta = 4{,}7462 \cdot 10^{12} \cdot \mathrm{sen}\,175 = 4{,}1366 \cdot 10^{11} \ \ m$$

A questo punto, siamo in grado di determinare la velocità e l'accelerazione orbitale della cometa, quando si trova in **C**.

Per determinare **la velocità orbitale della Cometa** alla distanza dal Sole,

$$r = 4.746.210.288.800 \ \ m = 4{,}7462 \cdot 10^{12} \ \ m$$

usiamo le relazioni valide, **per x compreso fra:**

il punto di Afelio ≤ x ≤ ed il punto di metà ellisse

$$-a-\sqrt{a^2-b^2} \le x \le -\sqrt{a^2-b^2}$$

$$-5{,}2802 \cdot 10^{12} \le x \le -2{,}59617 \cdot 10^{12}$$

La componente della velocità orbitale **lungo l'asse x,** vale:

$$\dot{x} = -\frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \dot{S} \cdot \sqrt{b^2 - 2 \cdot \sqrt{a^2-b^2} \cdot x - x^2}}{b^4 - b^2 \cdot \sqrt{a^2-b^2} \cdot x}$$

e, **al punto C**, con i seguenti valori:

$$a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}\, m \ ; \ b = 6{,}8099 \cdot 10^{11} \ m \ ; \ \dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15} \ \frac{m^2}{sec} \ ; \ x = -4{,}7281 \cdot 10^{12} \ m$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$v_{Cx} = -2.415{,}7091 \ \frac{m}{sec} = -8.696{,}5528 \approx -8.697 \ \frac{Km}{h}$$

La componente della velocità orbitale **lungo l'asse y,** vale:

$$\dot{y} = -\frac{2 \cdot \dot{S} \cdot \sqrt{b^2 - y^2}}{a \cdot b + \sqrt{a^2-b^2} \cdot \sqrt{b^2-y^2}}$$

e, **al punto C**, con i seguenti valori:

$$a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}\, m \ ; \ b = 6{,}8099 \cdot 10^{11} \ m \ ; \ \dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15} \ \frac{m^2}{sec} \ ; \ y = 4{,}1366 \cdot 10^{11} \ m$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$v_{Cy} = -801{,}4103 \ \frac{m}{sec} = -2.885{,}0771 \approx -2.885 \ \frac{Km}{h}$$

Il **modulo della velocità orbitale nel punto C** è dato dalla seguente relazione:

$$v_C = \sqrt{4 \cdot \dot{S}^2 \cdot \left(\frac{a^2 \cdot \left(b^2 - 2 \cdot \sqrt{a^2-b^2} \cdot x - x^2 \right)}{\left(b^3 - b \cdot \sqrt{a^2-b^2} \cdot x \right)^2} + \frac{b^2 - y^2}{\left(a \cdot b + \sqrt{a^2-b^2} \cdot \sqrt{b^2-y^2} \right)^2} \right)}$$

con i seguenti valori:

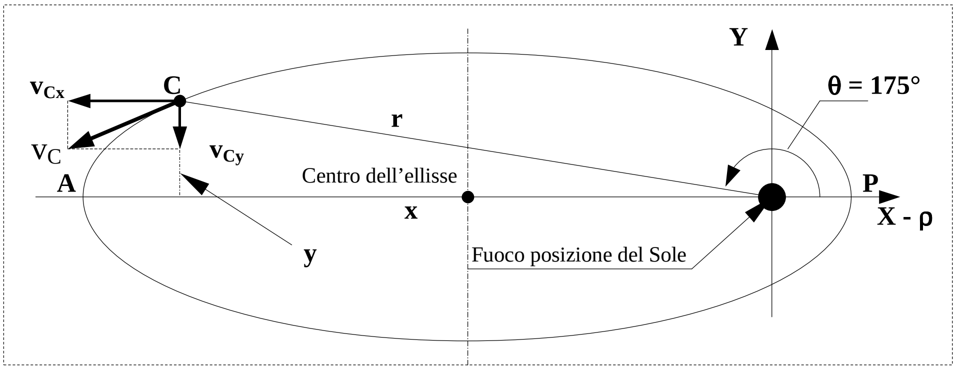
$$\mathbf{a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}\ m \quad ; \quad b = 6{,}8099 \cdot 10^{11}\ m \quad ; \quad \dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15}\ \frac{m^2}{sec}}$$

$$\mathbf{x = -4{,}7281 \cdot 10^{12}\ m \quad ; \quad y = 4{,}1366 \cdot 10^{11}\ m}$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$\mathbf{v_C = 2.545{,}2543\ \frac{m}{sec} = 2{,}545\ \frac{Km}{sec} = 9.163\ \frac{Km}{h}}$$

Riportiamo i valori calcolati nella seguente **Figura.**



A questo punto, verifichiamo i risultati ottenuti.

Ricordando che l'equazione della tangente in un punto **C**, dell'ellisse con l'origine **O** degli assi coordinati nel centro dell'ellisse stessa,

$$\text{di dati}\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ \\ C \equiv (x_0, y_0)\ ; \end{cases}$$

l'equazione della tangente è data da:

$$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1$$

Ora, tenendo conto, di quanto detto, in merito alla posizione del centro dell'ellisse, l'equazione della tangente, che è poi la direzione della velocità della cometa $\mathbf{v_C}$, diviene:

$$\frac{-(4{,}7281 \cdot 10^{12} + 8{,}7829 \cdot 10^{10} - 2{,}6840 \cdot 10^{12}) \cdot x}{(2{,}6840 \cdot 10^{12})^2} + \frac{4{,}1366 \cdot 10^{11} \cdot y}{(6{,}8099 \cdot 10^{11})^2} = 1$$

$$\frac{-2{,}13193 \cdot 10^{12}) \cdot x}{(2{,}6840 \cdot 10^{12})^2} + \frac{4{,}1366 \cdot 10^{11} \cdot y}{(6{,}8099 \cdot 10^{11})^2} = 1$$

ossia:

$$\mathbf{y = 1{,}121083 \cdot 10^{12} - 0{,}331776 \cdot x}$$

Come si vede, il modulo del coefficiente angolare della tangente, vale:

$$\mathbf{m = 0{,}331776 \Rightarrow \alpha = 18{,}3546°}$$

mentre il modulo del coefficiente angolare derivato dal triangolo delle velocità precedentemente calcolate, risulta:

$$\mathbf{m_0 = Tang\ \alpha = \frac{v_{Cy}}{v_{Cx}} = \frac{801{,}4103}{2.415{,}7091} = 0{,}331749 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 18{,}3532°}$$

i due valori sono pressoché coincidenti.

Il coefficiente angolare della tangente nel punto **C**, come abbiamo visto precedentemente, rappresenta la direzione della velocità orbitale della cometa $\mathbf{v_C}$, e può essere determinato usando l'equazione cartesiana della traiettoria e ricordando, il significato geometrico della derivata prima nel punto **C** che si considera, la quale, rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla traiettoria.
Allora, l'equazione della traiettoria, come abbiamo visto, considerando al parte positiva, è:

$$\mathbf{y = +3{,}7258 \cdot 10^{-13} \cdot \sqrt{2{,}1506 \cdot 10^{47} - 2{,}4079 \cdot 10^{36} \cdot x - 4{,}6375 \cdot 10^{23} \cdot x^2}}$$

mentre la derivata prima vale:

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{1{,}8629 \cdot 10^{-13} \cdot (-2{,}4079 \cdot 10^{36} - 9{,}275 \cdot 10^{23} \cdot x)}{\sqrt{2{,}1506 \cdot 10^{47} - 2{,}4079 \cdot 10^{36} \cdot x - 4{,}6375 \cdot 10^{23} \cdot x^2}}}$$

e per

$$\mathbf{x = -4{,}7281 \cdot 10^{12} \quad m}$$

assume il valore:

$$\mathbf{m_0 = Tang\ \alpha = \frac{dy}{dx} = 0{,}331779}$$

Come si vede questo valore è pressoché coincidente con i valori precedentemente calcolati.

Infine, verifichiamo il valore trovato per la velocità orbitale lineare **v**, usando la relazione precedentemente vista:

$$\mathbf{v = \sqrt{\frac{a^2}{1-\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{P}\right)^2 \cdot (\ 1 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \cos\theta + \varepsilon^2\ )}}$$

Allora, per il punto **C**, con i valori dati e tenendo conto che l'anomalia $\boldsymbol{\theta = 175°}$ **,** si trova che la velocità orbitale vale:

$$\mathbf{v = \sqrt{\frac{(2{,}6840 \cdot 10^{12})^2}{1 - 0{,}967277^2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{2{,}3983 \cdot 10^9}\right)^2 \cdot (\ 1 + 2 \cdot 0{,}967277 \cdot \cos 175° + 0{,}967277^2\ )} = 2.544{,}9194\ \frac{m}{sec}}$$

Come si vede abbiamo ottenuto il medesimo valore pressoché coincidente con quello precedentemente calcolato.

A questo punto verifichiamo la velocità $\mathbf{v_C}$ precedentemente calcolata nel punto **C,** con il valore che si ottiene dall'equazione che deriva dal principio di conservazione dell'energia totale e del principio di conservazione del momento della quantità di moto, che abbiamo visto essere:

$$\mathbf{v = \sqrt{\frac{K \cdot M_S \cdot (2 \cdot a - R - h)}{a \cdot (R + h)}}}$$

Ora, se a questa equazione, sostituiamo i rispettivi valori, tenendo presente che:

$$\mathbf{h = r_C - R = 4{,}7462 \cdot 10^{12} - 6{,}9599 \cdot 10^8 = 4{,}7455 \cdot 10^{12}\ m}$$

si trova per **la velocità nel punto C:**

$$\mathbf{v_C = \sqrt{\frac{6{,}67259 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30} \cdot (2 \cdot 2{,}6840 \cdot 10^{12} - 6{,}9599 \cdot 10^8 - 4{,}7455 \cdot 10^{12})}{2{,}6840 \cdot 10^{12} \cdot (6{,}9599 \cdot 10^8 + 4{,}7455 \cdot 10^{12})}} =}$$

$$\mathbf{= 2.545{,}2954\ \frac{m}{sec}}$$

Come si vede i valori trovati sono pressoché coincidenti.

Per determinare **la velocità angolare nel punto C**, ossia alla distanza dal Sole,

$$r_C = 4{,}7462 \cdot 10^{12} \ \ m$$

usiamo la relazione precedentemente vista:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{2 \cdot \pi \cdot a}{P \cdot \sqrt{1-\varepsilon^2}} \cdot \frac{1+\varepsilon \cdot \cos\theta}{r}$$

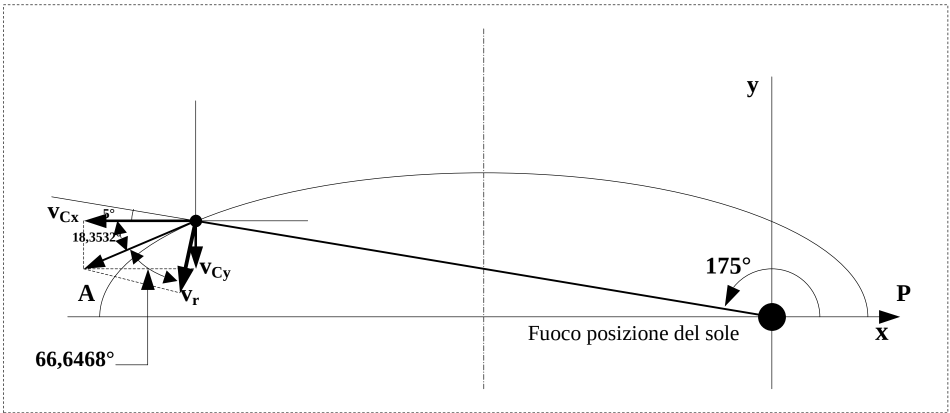
Ora nel punto **C** con i seguenti valori:

$a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}$ **m ;** $P = 2{,}3983 \cdot 10^{9}$ **sec ;** $\varepsilon = 0{,}96727700$ **;** $r = 4{,}7462 \cdot 10^{12}$ **m ;** $\theta = 175°$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che la velocità angolare, vale:

$$\omega_C = 2{,}12569 \cdot 10^{-10} \ \frac{rad}{sec}$$

Nel punto **C** la **velocità angolare** ω può essere determinata anche attraverso la relazione che si ottiene dal triangolo della velocità orbitale della seguente **Figura**:



ossia,

$$\omega_C = \frac{v_r}{r} = \frac{v_C \cdot \cos 66{,}6468°}{r} = \frac{2.545{,}2543 \cdot \cos 66{,}6468}{4{,}7462 \cdot 10^{12}} = 2{,}12577 \cdot 10^{-10} \ \frac{rad}{sec}$$

Come si vede i due valori così calcolati, sono pressoché coincidenti.

Per determinare **l'accelerazione orbitale della cometa**, alla distanza dal Sole,

$$r = 4.746.210.288.800 \ m = 4{,}7462 \cdot 10^{12} \ m$$

usiamo le relazioni valide, **per x compreso fra:**

il punto di Afelio ≤ x ≤ ed il punto di metà ellisse

$$-a - \sqrt{a^2 - b^2} \le x \le -\sqrt{a^2 - b^2}$$

$$-5{,}2802 \cdot 10^{12} \le x \le -2{,}59617 \cdot 10^{12}$$

La componente dell'accelerazione orbitale **lungo l'asse x,** vale:

$$\ddot{x} = -\frac{4 \cdot a^4 \cdot \dot{S}^2 \cdot x}{b^2 \cdot \left(b^2 - \sqrt{a^2 - b^2} \cdot x\right)^3}$$

e, **al punto C**, con i seguenti valori:

$a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}$ **m ;** $b = 6{,}8099 \cdot 10^{11}$ **m ;** $\dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15} \ \frac{m^2}{sec}$ **;** $x = -4{,}7281 \cdot 10^{12}$ **m**

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$a_{Cx} = 5{,}86867 \cdot 10^{-6} \; \frac{m}{sec^2}$$

La componente dell'accelerazione orbitale **lungo l'asse y,** vale:

$$\ddot{y} = -\frac{4 \cdot a \cdot b \cdot \dot{S}^2 \cdot y}{\left(a \cdot b + \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{b^2 - y^2}\right)^3}$$

e, **al punto C**, con i seguenti valori:

$$a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}\, m \; ; \; b = 6{,}8099 \cdot 10^{11}\; m \; ; \; \dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15} \; \frac{m^2}{sec} \; ; \; y = 4{,}1366 \cdot 10^{11}\; m$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$a_{Cy} = -5{,}13401 \cdot 10^{-7} \; \frac{m}{sec^2}$$

Il **modulo dell'accelerazione orbitale nel punto C** è dato dalla seguente relazione:

$$a_C = \sqrt{\frac{16 \cdot a^2 \cdot \dot{S}^4}{b^4} \cdot \left(\frac{a^6 \cdot x^2}{\left(b^2 - \sqrt{a^2 - b^2} \cdot x\right)^6} + \frac{b^6 \cdot y^2}{\left(a \cdot b + \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{b^2 - y^2}\right)^6} \right)}$$

con i seguenti valori:

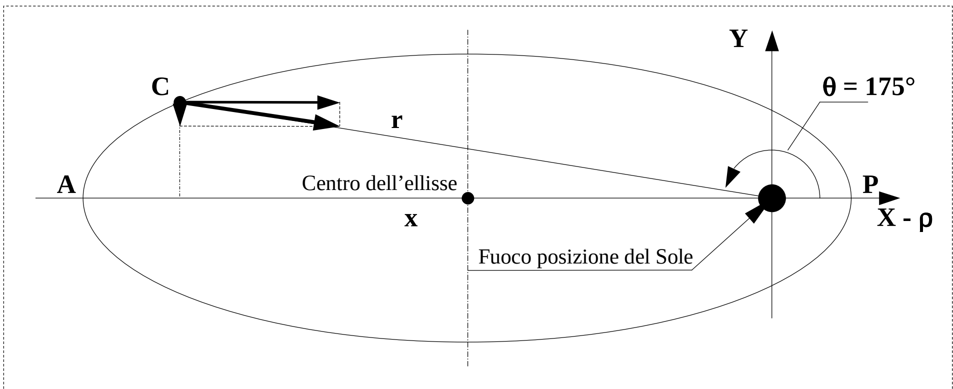
$$a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}\, m \quad ; \quad b = 6{,}8099 \cdot 10^{11}\; m \quad ; \quad \dot{S} = 2{,}3942 \cdot 10^{15} \; \frac{m^2}{sec} ;$$

$$x = -4{,}7281 \cdot 10^{12}\; m \quad ; \quad y = 4{,}1366 \cdot 10^{11}\; m$$

sostituiti nella relazione sopra scritta, si trova che vale:

$$a_C = 5{,}89109 \cdot 10^{-6} \; \frac{m}{sec^2}$$

Riportiamo i valori calcolati nella seguente **Figura.**



A questo punto confrontiamo i risultati ottenuti per l'accelerazione del punto **C** con il valore che si ottiene dalla relazione:

$$a_\rho = -\frac{C^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}$$

la quale, con i valori di:

$$\mathbf{C = 2 \cdot \dot{S} = 2 \cdot 2{,}3942 \cdot 10^{15} = 4{,}7884 \cdot 10^{15} \ \frac{m^2}{sec}}$$

$$\mathbf{p = 1{,}7278 \cdot 10^{11} \ m}$$

$\mathbf{r_C} =$ Distanza della cometa al punto C, dal sole $= \mathbf{4{,}7462 \cdot 10^{12} \ m}$

dà per l'accelerazione radiale il valore:

$$\mathbf{a_\rho = -\frac{C^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2} = -\frac{(4{,}7884 \cdot 10^{15})^2}{1{,}7278 \cdot 10^{11}} \cdot \frac{1}{(4{,}7462 \cdot 10^{12})^2} = 5{,}89109 \cdot 10^{-6} \ \frac{m}{sec^2}}$$

Come si vede i due valori sono coincidenti.

Ora, dalla sopra riportata **Figura**, si osserva che:

$$\mathbf{tang\,\alpha_0 = \frac{a_{Cy}}{a_{Cx}}} \quad \text{da cui} \quad \mathbf{\alpha_0 = arctang \frac{a_{Cy}}{a_{Cx}} = arctang \frac{5{,}13401 \cdot 10^{-7}}{5{,}86867 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow \alpha_0 = 5°}$$

ossia, i due angoli alterni interni sono uguali.

Per determinare il tempo **t** che impiega la Cometa Halley, dall'istante (**T = 0**), ossia da quando transita al Perielio, al momento in cui raggiunge il punto **C** di anomalia **θ = 175 ° = 3,05432619099 rad**, possiamo seguire il calcolo già visto precedentemente.

Ossia:

$$\mathbf{cos\,E = \frac{\varepsilon + cos\,\theta}{1 + \varepsilon \cdot cos\,\theta} = \frac{0{,}967277 + cos\,3{,}05432619}{1 + 0{,}967277 \cdot cos\,3{,}05432619} = -0{,}794359}$$

da cui:

$$\mathbf{E = 2{,}488749}$$

Questo valore sostituito nella relazione **(3)** precedentemente vista, fornisce **M**, ossia:

$$\mathbf{M = 2{,}488749 - 0{,}967277 \cdot sen\,2{,}488749 = 1{,}90118}$$

Questo valore sostituito nella relazione **(4)** precedentemente vista, permette di ottenere il tempo **t** cercato,

$$\mathbf{M = \frac{2 \cdot \pi}{P} \cdot (t - T)}$$

ed essendo **T = 0** si trova:

$$\mathbf{t = \frac{P \cdot M}{2 \cdot \pi} = \frac{2{,}3983 \cdot 10^9 \cdot 1{,}90118}{2 \cdot \pi} = 7{,}25683 \cdot 10^8 \ sec = 8.399{,}1088 \ giorni = 23{,}0113 \ anni}$$

Quindi il punto **C** viene raggiunto dopo un tempo **t = 23,0113 anni** dal passaggio della cometa al Perielio. O meglio, questo punto è stato raggiunto il **07 febbraio 2009**.

Usando la **Legge Temporale** data dalla seguente equazione:

$$\mathbf{(t - T) = \frac{a^{1,5}}{\sqrt{K \cdot M_S}} \cdot \left[arccos\left(\frac{a - r}{a \cdot \varepsilon}\right) - \varepsilon \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a - r}{a \cdot \varepsilon}\right)^2} \right]}$$

il punto **C,** con i seguenti valori:

$\mathbf{a = 2{,}6840 \cdot 10^{12} \ m \ ; K = 6{,}67259 \cdot 10^{-11} \ \frac{N \cdot m^2}{Kg^2} \ ; \ M_S = 1{,}9891 \cdot 10^{30} \ Kg \ ; \ \varepsilon = 0{,}96727700 \ ;}$

$\mathbf{r = 4{,}7462 \cdot 10^{12} \ m \ ; \ T = 0 \ .}$

sostituiti nell'equazione sopra scritta, viene raggiunto nel tempo $\mathbf{t = 7{,}2560 \cdot 10^8 \ sec}$

Come si vede i due valori sono pressoché coincidenti.

Usando la relazione che dà il tempo in funzione della posizione orbitale, vista precedentemente, si ottiene:

$$\mathbf{t = 3{,}8159 \cdot 10^8 \cdot \left[2 \cdot \arctan\left(0{,}128972 \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - \frac{0{,}24542 \cdot sen\theta}{1 + 0{,}967277 \cdot \cos\theta} \right]}$$

e, per

$$\mathbf{\theta = 175° = 3{,}05432619099 \ rad.}$$

sostituito nella relazione precedente si trova che

$$\mathbf{t = 7{,}25472 \cdot 10^8 \ sec}$$

valore pressoché coincidente con i valori precedentemente calcolati.

Ora eseguiamo una verifica, ossia determiniamo il tempo **t** occorrente alla cometa per raggiungere dal Perielio, l'Afelio.

Per determinare il tempo **t** che impiega la Cometa Halley, dall'istante (**T = 0**), ossia da quando transita al Perielio, al momento in cui raggiunge l'Afelio di anomalia **θ = 180° = 3,14159265359 rad**, possiamo seguire il colcolo già visto precedentemente.

Ossia:

$$\mathbf{\cos E = \frac{\varepsilon + \cos\theta}{1 + \varepsilon \cdot \cos\theta} = \frac{0{,}967277 + \cos 3{,}14159265}{1 + 0{,}967277 \cdot \cos 3{,}14159265} = -1}$$

da cui:

$$\mathbf{E = 3{,}14159265}$$

mentre

$$\mathbf{M = 3{,}14159265 - 0{,}967277 \cdot sen \ 3{,}14159265 = 3{,}14159265}$$

e

$$\mathbf{t = \frac{P \cdot M}{2 \cdot \pi} = \frac{2{,}3983 \cdot 10^9 \cdot 3{,}14159265}{2 \cdot \pi} = 1{,}19915 \cdot 10^9 \ sec = 13.879{,}0509 \ giorni = 38{,}0248 \ anni}$$

Quindi l'Afelio viene raggiunto dopo un tempo **t = 38,0248 anni** dal passaggio della cometa al Perielio. O meglio, il punto sarà raggiunto il **09 febbraio 2024**.

Tale valore coincide proprio con la metà del valore del periodo di rivoluzione precedentemente calcolato.

$$\mathbf{\frac{P}{2} = \frac{27.758}{2} = 13.879 \ giorni = 38{,}0247 \ anni}$$

Usando la **Legge Temporale** data dalla seguente equazione:

$$\mathbf{(t - T) = \frac{a^{1,5}}{\sqrt{K \cdot M_S}} \cdot \left[\arccos\left(\frac{a - r}{a \cdot \varepsilon}\right) - \varepsilon \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a - r}{a \cdot \varepsilon}\right)^2} \right]}$$

il punto **C,** con i seguenti valori:

$a = 2{,}6840 \cdot 10^{12}$ m ; $K = 6{,}67259 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{Kg^2}$; $M_S = 1{,}9891 \cdot 10^{30}$ Kg ; $\varepsilon = 0{,}96727700$;

$r = 5{,}2802 \cdot 10^{12}$ m ; $T = 0$.

sostituiti nell'equazione sopra scritta, viene raggiunto nel tempo **$t = 1{,}19902 \cdot 10^9$ sec**

Come si vede i due valori sono pressoché coincidenti.

Da ultimo, calcoliamo la **lunghezza della traiettoria ellittica** della cometa.

Per far ciò, rappresentiamo l'ellisse in **coordinate parametriche**, in quanto è più facile risolvere l'integrale della lunghezza, che si dovrà calcolare.

Ora, tenendo presente che, nel centro dell'ellisse si trova l'origine **O** degli assi coordinati **x, y,** per i quali si può scrivere la rappresentazione parametrica seguente della traiettoria dell'ellisse:

$$\begin{cases} \mathbf{x = 2{,}6840 \cdot 10^{12} \cdot \cos\theta} & \mathbf{[\ m\ ]} \\ \mathbf{y = 6{,}8099 \cdot 10^{11} \cdot sen\,\theta} & \mathbf{[\ m\ ]} \end{cases}$$

Allora, per determinare **la lunghezza del perimetro dell'ellisse**, quando la curva è data in forma parametrica, sappiamo che l'equazione da calcolare è data dà:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \right] \cdot dt$$

in cui:

$$x' = \frac{dx}{d\theta} = -\ 2{,}6840 \cdot 10^{12} \cdot sen\,\theta \qquad e \qquad y' = \frac{dy}{d\theta} = 6{,}8099 \cdot 10^{11} \cdot \cos\theta$$

Sostituiti, questi valori nella relazione sopra scritta, tenendo conto della nuova variabile **θ,**

$$S = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left[\sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} \right] \cdot d\theta$$

si ottiene la lunghezza della traiettoria ellittica:

$$S = 2 \cdot \int_0^{\pi} \left[\sqrt{(-2{,}6840 \cdot 10^{12} \cdot sen\theta)^2 + (6{,}8099 \cdot 10^{11} \cdot \cos\theta)^2} \right] d\theta = 1{,}15307 \cdot 10^{13} \quad m$$

Questo valore può anche essere ottenuto, adottando per l'ellisse le equazioni parametriche:

$$x = a \cdot \cos t \quad ; \quad y = b \cdot sent \qquad \text{con} \quad 0 \le t \le 2 \cdot \pi$$

e limitandoci a considerare un quarto di essa, in base alla formula:

$$S = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\ dt$$

si trova:

$$S = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cdot sen^2 t + b^2 \cdot \cos^2 t}\ dt = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cdot (1 - \cos^2 t) + b^2 \cdot \cos^2 t}\ dt =$$

$$= 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cdot \cos^2 t}\ dt$$

Mediante la sostituzione $\mathbf{t = \frac{\pi}{2} - \varphi}$ **,** da cui $\frac{dt}{d\varphi} = -1$ e $\mathbf{dt = -d\varphi}$, si ottiene:

$$S = -4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}\ d\varphi = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cdot \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot sen^2\varphi\right)}\ d\varphi =$$

$$= 4 \cdot a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot sen^2\varphi\right)}\ d\varphi$$

Posto: $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2} = k^2$ si vede che risulta $0 < k^2 < 1$, e quindi la lunghezza cercata sarà:

$$S = 4 \cdot a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \cdot sen^2\varphi}\ d\varphi = 4 \cdot a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - sen^2\alpha \cdot sen^2\varphi}\ d\varphi$$

dove l'integrale è **un integrale ellittico completo di 2ª specie**.

Ora, usando la **TAVOLA degli integrali ellittici di 2ª specie completi**, osserviamo che:

$$k^2 = sen^2\alpha$$

ed essendo

$$k^2 = \frac{(2{,}6840 \cdot 10^{12})^2 - (6{,}8099 \cdot 10^{11})^2}{(2{,}6840 \cdot 10^{12})^2} = 0{,}935625$$

quindi:

$$sen^2\alpha = 0{,}935625 \qquad \text{da cui} \qquad \alpha = 75{,}302125\,°$$

Allora dalla **TAVOLA degli integrali ellittici di 2ª specie completi,** si trova in corrispondenza di **α = 75,302125 °,** per interpolazione il valore:

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \cdot sen^2\varphi}\ d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - sen^2\alpha \cdot sen^2\varphi}\ d\varphi = 1{,}07404987336$$

Per cui la lunghezza dell'ellisse, sarà:

$$S = 4 \cdot a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \cdot sen^2\varphi}\ d\varphi = 4 \cdot 2{,}6840 \cdot 10^{12} \cdot 1{,}07404987336 = 1{,}1531 \cdot 10^{13}\ m$$

ossia:

$$S = 1{,}1531 \cdot 10^{13}\ m$$

Come si vede abbiamo ottenuto il medesimo valore precedentemente calcolato.

Ora, ricordando che, la traiettoria viene percorsa in:

$$P = 27.758\ \text{giorni} = 2{,}3983 \cdot 10^9\ sec = 76{,}05\ \text{anni}$$

la **velocità media** con la quale la Cometa percorre l'orbita, sarà data dà:

$$v_{Media} = \frac{S}{T} = \frac{1{,}15307 \cdot 10^{13}}{2{,}3983 \cdot 10^9} = 4.807{,}8639\ \frac{m}{sec} = 4{,}807\ \frac{Km}{sec} = 17.308\ \frac{Km}{h}$$

Da misurazioni astronomiche fatte da sonde terrestri (Giotto – Vega 1 – Vega 2 – Suisei e Sakigake), risulta che **la massa della Cometa Halley**, della forma di una patata allungata (16 $\times$ 8 Km) **è all'incirca**:

$$m_C = 6 \cdot 10^{14}\ Kg$$

*****

Infine, osserviamo che, questo studio della Cometa Halley, della durata di diversi giorni, è terminato il **07 ottobre 2014**. Vogliamo, allora, calcolare (o meglio conoscere) la posizione della Cometa Halley nella sua traiettoria in questo giorno, rispetto al passaggio al Perielio avvenuto il **09 febbraio 1986**. Ciò si ottiene calcolando **l'anomalia vera θ.**

Allora:

i giorni totali trascorsi sono: [(07 ottobre 2014) – (09 febbraio 1986)] **= 10.467 giorni**

quindi il tempo trascorso dal momento del passaggio al Perielio è pari a:

$$\mathbf{t = 10.467\ giorni\ =\ 28{,}6767\ anni\ =\ 904.348.800\ sec}$$

Ora, dalla relazione che rappresenta **anomalia media**:

$$\mathbf{M = \frac{2\cdot\pi}{P}\cdot(t-T)}$$

essendo **T = 0** e $\mathbf{P = 2{,}3983\cdot 10^{9}\ sec}$, si trova che vale:

$$\mathbf{M = \frac{2\cdot\pi\cdot 904.348.800}{2{,}3983\cdot 10^{9}} = 2{,}36925784}$$

e dall'**equazione di Keplero**

$$\mathbf{E - \varepsilon\cdot sen\,E = M}$$

sostituendo i corrispondenti valori,

$$\mathbf{E - 0{,}967277\cdot sen\,E = 2{,}36925784}$$

per tentativi, si trova che l'**anomalia eccentrica E ,** vale:

$$\mathbf{E = 2{,}7438876}$$

Questo valore sostituito nella relazione:

$$\mathbf{\cos E = \frac{\varepsilon+\cos\theta}{1+\varepsilon\cdot\cos\theta}}$$

ossia:

$$\mathbf{\cos 2{,}7438876 = \frac{0{,}967277+\cos\theta}{1+0{,}967277\cdot\cos\theta}}$$

per tentativi fornisce **l'anomalia vera** cercata, che dà la posizione della Cometa nella sua traiettoria, nel giorno **07 ottobre 2014**,

$$\mathbf{\theta = 3{,}08962\ rad = 177{,}0222° = 177°\ 01'\ 19{,}870''}$$

Usando, invece, la **Legge Temporale** data dalla seguente equazione:

$$\mathbf{(t-T) = \frac{a^{1,5}}{\sqrt{K\cdot M_S}}\cdot\left[\arccos\left(\frac{a-r}{a\cdot\varepsilon}\right)-\varepsilon\cdot\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\cdot\varepsilon}\right)^{2}}\right]}$$

con i seguenti valori:

$\mathbf{a = 2{,}6840\cdot 10^{12}\ m}$ **;** $\mathbf{K = 6{,}67259\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{Kg^2}}$ **;** $\mathbf{M_S = 1{,}9891\cdot 10^{30}\ Kg}$ **;** $\mathbf{\varepsilon = 0{,}96727700}$ **;**

t = 10.467 giorni = 904.348.800 sec ; T = 0 .

sostituiti nell'equazione sopra scritta, si trova:

$$\mathbf{904.348.800 + 0{,}0001422\cdot\sqrt{(5{,}28017\cdot 10^{12}-r)\cdot(r-8{,}782853\cdot 10^{10})} -}$$

$$\mathbf{-\ 3{,}81679\cdot 10^{8}\cdot arcCos\ [\ 1{,}03383 - 3{,}85182\cdot 10^{-13}\cdot r\ ] = 0}$$

Questa equazione risolta per tentativi fornisce:

$$\mathbf{r = 5{,}07762 \cdot 10^{12} \ m}$$

Questo valore sostituito nell'equazione della traiettoria ellittica

$$5{,}07762 \cdot 10^{12} = \frac{1{,}7278 \cdot 10^{11}}{1 + 0{,}967277 \cdot \cos\theta}$$

dà per l'anomalia θ il valore:

$$\theta = 3{,}08964 \text{ rad} = 177{,}0233° = 177° \ 01' \ 23{,}99''$$

Come si vede i due valori sono pressoché coincidenti.

Rovereto, 07 ottobre 2014, ore 18,30.
Giorno di fiera a Concadirame
"Madonna del Santo Rosario"
a ricordo della battaglia di Lepanto

Continuando

Si osserva che, la meta definitiva del problema planetario non è però la determinazione della posizione e dei parametri del moto del corpo nella sua orbita, ma la determinazione della sua posizione nello spazio in uno dei sistemi astronomici di riferimento, in particolare in quello eliocentrico, che permette di collegare la teoria con l'osservazione.

Allora, tenendo presente che si confonde θ con ν.

Le sei costanti che specificano il moto di un oggetto e gli elementi dell'orbita dell'oggetto, sono per la Cometa Halley, date dà:

a ≡ Semiasse maggiore dell'orbita = $\mathbf{2{,}6840 \cdot 10^{12}}$ **m ;**
e ≡ Eccentricità dell'orbita = **0,967277 ;**
T ≡ Tempo di passaggio al perielio = **9 Febbraio 1986** ;
Ω ≡ Longitudine del nodo ascendente = **58,14** °;
i ≡ Inclinazione dell'orbita (misurata sul piano fondamentale da **ν = 0**°→**180**°) = **162,239 °;**
ω ≡ Argomento del Perielio (misurato tra il nodo ascendente e la direzione del moto con variazione **0**° → **180**°) rilevato nel 1950 = **111,85 °;** attuale **= 117,511°**

Dalla seguente **Figura** si vedono le disposizioni dei vari parametri.

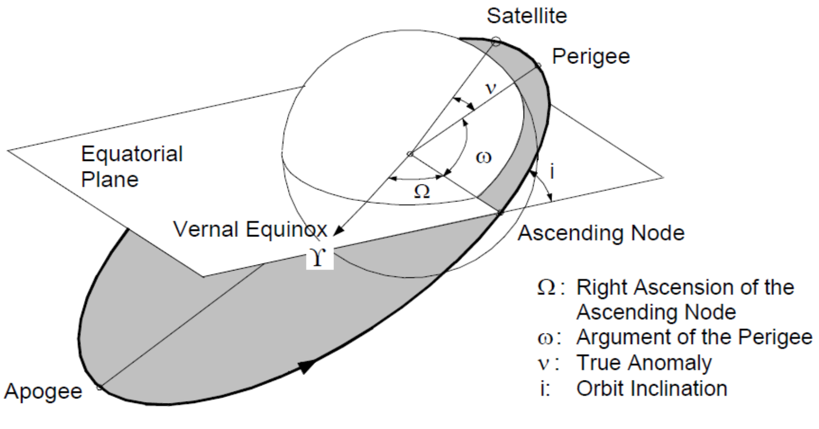


Figure 3-1 Satellite Orbit in Space

Ricordando:

“ …… che, le coordinate x_S, y_S, z_S, di un punto della traiettoria di raggio vettore $\vec{r}$ del satellite, in funzione dell’**anomalia vera ν**, sono date dà:

$$x_S = \frac{p}{1+e\cdot\cos\nu}\cdot\left[\cos\Omega\cdot\cos(\omega+\nu)-\mathrm{sen}\Omega\cdot\mathrm{sen}(\omega+\nu)\cdot\cos i\right]$$

$$y_S = \frac{p}{1+e\cdot\cos\nu}\cdot\left[\mathrm{sen}\Omega\cdot\cos(\omega+\nu)+\cos\Omega\cdot\mathrm{sen}(\omega+\nu)\cdot\cos i\right]$$

$$z_S = \frac{p}{1+e\cdot\cos\nu}\cdot\mathrm{sen}(\omega+\nu)\cdot\mathrm{sen}\, i$$ **”**

Queste relazioni sono, ora, utilizzate per calcolare la lunghezza dell’**asse maggiore e minore della traiettoria ellittica** nello spazio, servendosi, inoltre, della relazione per calcolare la distanza di due punti nello spazio, data dà:

$$D = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Infatti, con: $\Omega = 58{,}14\,°$; $\omega = 117{,}511°$; $i = 162{,}239\,°$ le equazioni sopra scritte,

con $\nu = 0\,°$ danno le coordinate spaziali del **Perielio**;

$$x_P = -4{,}159604\cdot10^{10}\ \text{m} \quad ; \quad y_P = -7{,}361399\cdot10^{10}\ \text{m} \quad ; \quad z_P = 2{,}376185\cdot10^{10}\ \text{m}$$

e con $\nu = 180\,°$ danno le coordinate spaziali dell’**Afelio**:

$$x_A = 2{,}500716\cdot10^{12}\ \text{m} \quad ; \quad y_A = 4{,}425606\cdot10^{12}\ \text{m} \quad ; \quad z_A = -1{,}428541\cdot10^{12}\ \text{m}$$

Con questi valori, la lunghezza dell’**asse maggiore dell’ellisse,** o linea degli apsidi, vale:

$$D_M = 2\cdot a = 5{,}368008\cdot10^{12}\ \text{m}$$

Mentre, sappiamo che, matematicamente la lunghezza dell’**asse maggiore dell’ellisse** vale:

$$L_a = 2\cdot a = 5{,}368029\cdot10^{12}\ \text{m}$$

Allora i due valori, si possono ritenere coincidenti.

Con $\nu = 162{,}976\,°$, al posto del valore reale **(165,3021°)**, si trovano le coordinate spaziali del vertice di destra dell’asse minore, che valgono:

$$x_D = 8{,}070806\cdot10^{11}\ \text{m} \quad ; \quad y_D = 1{,}492719\cdot10^{12}\ \text{m} \quad ; \quad z_D = -6{,}900247\cdot10^{11}\ \text{m}$$

e con $\nu = 193{,}976\,°$, al posto del valore reale **(194,6978°)**, si trovano le coordinate spaziali del vertice di sinistra dell’asse minore, che valgono:

$$x_S = 1{,}531198\cdot10^{12}\ \text{m} \quad ; \quad y_S = 2{,}644785\cdot10^{12}\ \text{m} \quad ; \quad z_S = -6{,}434833\cdot10^{11}\ \text{m}$$

Con questi valori, la lunghezza dell’asse minore dell’ellisse vale:

$$D_m = 2\cdot b = 1{,}361531\cdot10^{12}\ \text{m}$$

Mentre sappiamo che, matematicamente la lunghezza dell’**asse minore dell’ellisse** vale:

$$L_b = 2\cdot b = 1{,}361980\cdot10^{12}\ \text{m}$$

Allora i due valori, si possono ritenere coincidenti.

Inoltre per il punto di anomalia ν = **160** °, raggiunto il **27 marzo 1990**, si trovano le coordinate spaziali, che valgono:

$$\mathbf{x_{160°} = 6{,}183249 \cdot 10^{11}\ m \quad ; \quad y_{160°} = 1{,}156326 \cdot 10^{12}\ m \quad ; \quad z_{160°} = -5{,}738587 \cdot 10^{11}\ m}$$

Mentre per il punto di anomalia ν = **175** °, raggiunto il **07 febbraio 2009**, si trovano le coordinate spaziali, che valgono:

$$\mathbf{x_{175°} = 2{,}095163 \cdot 10^{12}\ m \quad ; \quad y_{175°} = 3{,}747438 \cdot 10^{12}\ m \quad ; \quad z_{175°} = -1{,}337503 \cdot 10^{12}\ m}$$

Infine per il punto di anomalia ν = **177,0222** °, raggiunto il **07 ottobre 2014**, si trovano le coordinate spaziali, che valgono:

$$\mathbf{x_{177{,}0222°} = 2{,}309571 \cdot 10^{12}\ m \ ; \ y_{177{,}0222°} = 4{,}112551 \cdot 10^{12}\ m \ ; \ z_{177{,}0222°} = -1{,}409023 \cdot 10^{12}\ m}$$

Ora, sappiamo che, il **Sole** è posto nel Fuoco **O (0, 0, 0),** con gli assi coordinati ortogonali, quindi la distanza del **Perielio** dal **Sole**, calcolata con le coordinate sopra determinate vale:

$$\mathbf{D_P = \sqrt{(-4{,}159604 \cdot 10^{10} - 0)^2 + (-7{,}361399 \cdot 10^{10} - 0)^2 + (2{,}376185 \cdot 10^{10} - 0)^2} = 8{,}782867 \cdot 10^{10}\, m}$$

mentre sappiamo, che le osservazioni astronomiche danno:

$$\mathbf{D_P = 8{,}7829 \cdot 10^{10}\ \ m}$$

Allora i due valori, si possono ritenere coincidenti.

Per quanto riguarda la distanza dell'**Afelio** dal **Sole**, si trova:

$$\mathbf{D_A = \sqrt{(2{,}500716 \cdot 10^{12} - 0)^2 + (4{,}425606 \cdot 10^{12} - 0)^2 + (-1{,}428541 \cdot 10^{12} - 0)^2} = 5{,}280180 \cdot 10^{12}\, m}$$

mentre sappiamo, che le osservazioni astronomiche danno:

$$\mathbf{D_A = 5{,}2802 \cdot 10^{12}\ \ m}$$

Quindi i due valori, si possono ritenere coincidenti.

Infine, osserviamo che: le relazioni sopra riportate per la determinazione delle coordinate $\mathbf{x_S}$, $\mathbf{y_S}$, $\mathbf{z_S}$, del punto della traiettoria, **danno dei valori estremamente variabili per piccole variazioni angolari.**

Infatti, con: $\mathbf{\Omega = 58{,}14}$ ° ; $\mathbf{\omega = 117{,}511°}$ (al posto di $\mathbf{\omega = 111{,}85}$ ° del 1950) ; **i = 162,239** ° ,

la serie di valori, danno dei risultati che sono coincidenti con quelli precedentemente calcolati, mentre se si utilizzasse il valore di $\mathbf{\omega = 111{,}85}$ ° rilevato nel 1950, la differenza con i valori precedentemente calcolati, risulterebbe molto marcata.

A questo punto, le coordinate cartesiane ortogonali della posizione iniziale del **Perielio** e della posizione finale dell'**Afelio**, sono rispettivamente $\mathbf{P \equiv (-4{,}159604 \cdot 10^{10},\ -7{,}361399 \cdot 10^{10},\ 2{,}376185 \cdot 10^{10})}$ e $\mathbf{A \equiv (2{,}500716 \cdot 10^{12},\ 4{,}425606 \cdot 10^{12},\ -1{,}428541 \cdot 10^{12}).}$

Determiniamo, allora, **il modulo** e i **coseni direttori dell'asse maggiore** della traiettoria ellittica.

Ora, la posizione iniziale nello spazio del Perielio e la posizione finale nello spazio dell'Afelio, è individuata in forma vettoriale dai seguenti vettori:

$$\mathbf{\vec{P}_I = -4{,}159604 \cdot 10^{10} \cdot I - 7{,}361399 \cdot 10^{10} \cdot J + 2{,}376185 \cdot 10^{10} \cdot K}$$

$$\mathbf{\vec{A}_F = 2{,}500716 \cdot 10^{12} \cdot I + 4{,}425606 \cdot 10^{12} \cdot J - 1{,}428541 \cdot 10^{12} \cdot K}$$

quindi, il vettore che individua l'asse maggiore o asse degli apsidi $\mathbf{\vec{S}}$**,** sarà dato dalla seguente espressione ed avrà le seguenti componenti:

$$\mathbf{\vec{S} = \vec{A}_F - \vec{P}_I = 2{,}542312 \cdot 10^{12} \cdot I + 4{,}499220 \cdot 10^{12} \cdot J - 1{,}452303 \cdot 10^{12} \cdot K}$$

per cui, per calcolare il valore della lunghezza dell'asse **S**, è sufficiente calcolarne il modulo:

$$\left|S\right| = \sqrt{(2{,}542312\cdot10^{12})^2 + (4{,}499220\cdot10^{12})^2 + (1{,}452303\cdot10^{12})^2} = 5{,}368008\cdot10^{12}\ \text{m}$$

che coincide con il valore precedentemente calcolato.

I **coseni direttori del vettore asse maggiore** $\vec{S}$ saranno dati dà:

il coseno direttore che il vettore $\vec{S}$ forma con l'asse **x,** vale:

$$\cos\alpha = \frac{S_x}{S} = \frac{2{,}542312\cdot10^{12}}{5{,}368008\cdot10^{12}} = 0{,}473604 \quad \text{da cui} \quad \alpha = \arccos(\,0{,}473604\,) = 61{,}7315°$$

mentre il coseno direttore che il vettore $\vec{S}$ forma con l'asse **y,** vale:

$$\cos\beta = \frac{S_y}{S} = \frac{4{,}499220\cdot10^{12}}{5{,}368008\cdot10^{12}} = 0{,}838154 \quad \text{da cui} \quad \beta = \arccos(\,0{,}838154\,) = 33{,}0542\,°$$

ed infine, il coseno direttore che il vettore $\vec{S}$ forma con l'asse **z,** vale:

$$\cos\gamma = \frac{S_z}{S} = \frac{-1{,}452303\cdot10^{12}}{5{,}368008\cdot10^{12}} = -0{,}270547 \quad \text{da cui} \quad \gamma = \arccos(-\,0{,}270547\,) = 105{,}6968\,°$$

Ora sappiamo che deve valere la relazione:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Sostituendo i rispettivi valori abbiamo:

$$\cos^2 61{,}7315° + \cos^2 33{,}0542° + \cos^2 105{,}6968° = 0{,}2243 + 0{,}7025 + 0{,}0732 = 1$$

Ciò conferma che i coseni direttori dell'asse maggiore sono esatti.

*****

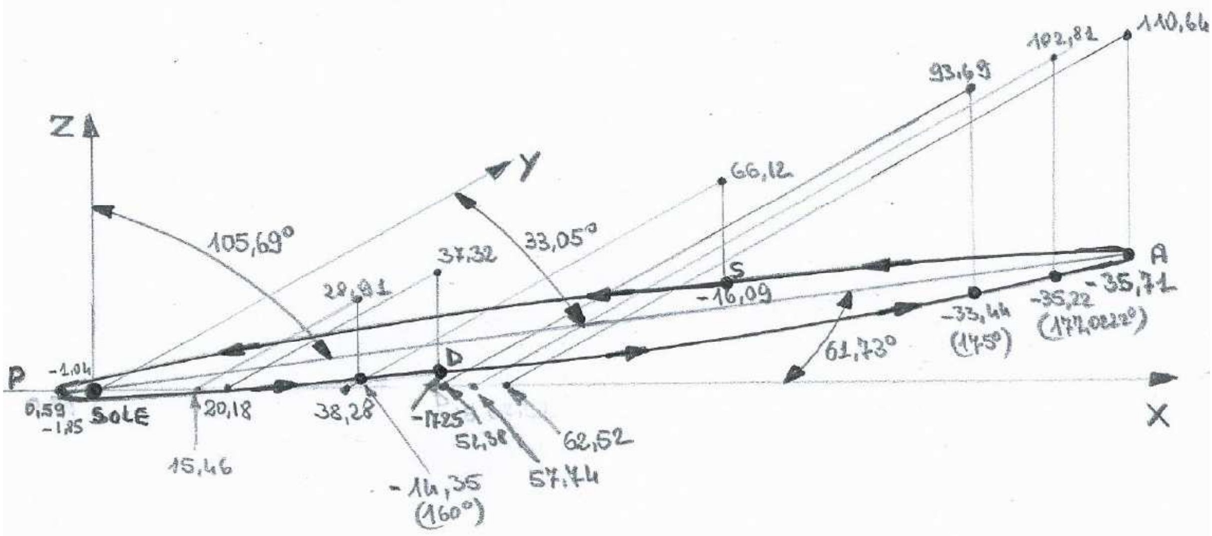
Per rappresentare la traiettoria della Cometa Halley in una **Figura,** che stia in questo foglio, usiamo la seguente scala delle lunghezze.

Scala: 1 mm = $4\cdot10^{10}$ **m**

Allora i punti caratteristici sopra calcolati assumono le seguenti dimensioni in **mm**:

$x_P = -1{,}04$;	$y_P = -1{,}84$;	$z_P = 0{,}59$
$x_A = 62{,}52$;	$y_A = 110{,}64$;	$z_A = -35{,}71$
$x_D = 20{,}18$;	$y_D = 37{,}32$;	$z_D = -17{,}25$
$x_S = 38{,}28$;	$y_S = 66{,}12$;	$z_S = -16{,}09$
$x_{160°} = 15{,}46$;	$y_{160°} = 28{,}91$;	$z_{160°} = -14{,}35$
$x_{175°} = 52{,}38$;	$y_{175°} = 93{,}69$;	$z_{175°} = -33{,}44$
$x_{177{,}0222°} = 57{,}74$;	$y_{177{,}0222°} = 102{,}81$;	$z_{177{,}0222°} = -35{,}22$

Questi valori riportati nella seguente **Figura,** rappresentano l'andamento spaziale della traiettoria della **Cometa Halley**, nel sistema ortogonale eliocentrico di riferimento **O (x, y, z)**, - sistema *eclittico* - con il piano **xy** coincidente col piano dell'orbita della Terra intorno al Sole (eclittica) e il cui asse **x** è diretto all'equinozio di primavera.



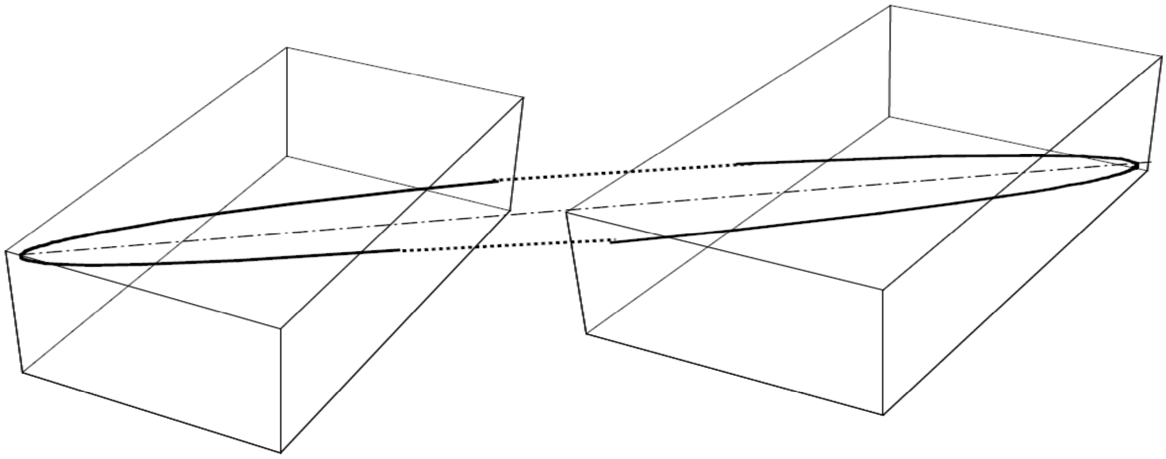
Se si usano le coordinate spaziali sopra riportate con i valori relativi:

$$x_S = \frac{1{,}7278\cdot 10^{11}}{1+0{,}967277\cdot\cos\nu}\cdot\left[\cos 58{,}14\cdot\cos(117{,}511+\nu)-\mathrm{sen}\,58{,}14\cdot\mathrm{sen}(117{,}511+\nu)\cdot\cos 162{,}239\right]$$

$$y_S = \frac{1{,}7278\cdot 10^{11}}{1+0{,}967277\cdot\cos\nu}\cdot\left[\mathrm{sen}\,58{,}14\cdot\cos(117{,}511+\nu)+\cos 58{,}14\cdot\mathrm{sen}(117{,}511+\nu)\cdot\cos 162{,}239\right]$$

$$z_S = \frac{1{,}7278\cdot 10^{11}}{1+0{,}967277\cdot\cos\nu}\cdot\mathrm{sen}(117{,}511+\nu)\cdot\mathrm{sen}\,162{,}239$$

la curva ellittica della traiettoria spaziale in funzione dell'anomalia vera ν, risulta come sotto riportata.



Concludendo:

il moto della cometa ora studiato rappresenta una prima approssimazione della traiettoria, ossia, rappresenta il caso ideale di moto ellittico non perturbato, in cui è presente soltanto la cometa stessa che ruota intorno al Sole. Mentre, sappiamo che, per avere una maggiore precisione della traiettoria, si dovrebbe tenere conto di tutte le perturbazioni possibili che influiscono sulla cometa durante il suo moto, dovute ai Pianeti, al Vento solare, e ad altri corpi celesti, nonché, si dovrebbe tener conto, della lenta variazione della giacitura e dell'orientamento dell'orbita.

Rovereto, 12 Ottobre 2018. 19,30.
526 anni dalla scoperta dell'America